



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



Politechnika Świętokrzyska
Wydział Inżynierii Środowiska
Geodezji i Energetyki Odnawialnej

Kierunek studiów:
geodezja i kartografia

Małgorzata Błasiak

Materiały dydaktyczne do przedmiotu

FIZYKA

opracowane w ramach realizacji Projektu
**„Dostosowanie kształcenia
w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb
współczesnej gospodarki”**
FERS.01.05-IP.08-0234/23

Kielce, 2025



Politechnika Świętokrzyska
Kielce University of Technology

Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki”
nr FERS.01.05-IP.08-0234/23



Spis treści

1. Wstęp	3
2. Niektóre własności wektorów	3
2.1. Iloczyn skalarny.....	3
2.2. Iloczyn wektorowy	4
2.3. Iloczyn mieszany.....	5
2.4. Przykładowe zadania	5
3. Prędkość chwilowa i przyspieszenie chwilowe	10
3.1. Przykładowe zadania	11
4. Analiza ruchu punktu materialnego	16
4.1. Równania ruchu	16
4.2. Przykładowe zadania	18
Literatura.....	25



Materiały dydaktyczne objęte licencją Creative Commons BY 4.0.

Licencja dostępna pod adresem: <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



1. Wstęp

Wektory w fizyce pełnią kluczową rolę w opisie różnych zjawisk i procesów. Służą do przedstawienia wielkości mających zarówno wartość jak i kierunek, takich jak siła, prędkość, przyspieszenie czy przemieszczenie. Wektory umożliwiają analizę sił działających na obiekt. Można je dodawać, odejmować aby znaleźć wypadkową siłę, co jest istotne w statyce i dynamice. Wektory prędkości i przyspieszenia są niezbędne do opisu ruchu ciał. Umożliwiają określenie, jak szybko i w jakim kierunku porusza się obiekt. Używane są również do opisu pól fizycznych (np. pole elektryczne, pole grawitacyjne). Wektory momentu siły i momentu bezwładności są kluczowe w analizie ruchu obrotowego. Wektory są zatem niezbędnym narzędziem w fizyce, umożliwiającym precyzyjne modelowanie i zarazem zrozumienie zjawisk zachodzących w przyrodzie.

2. Niektóre własności wektorów

2.1. Iloczyn skalarny

W wyniku iloczynu skalarnego dwóch wektorów otrzymujemy liczbę – skalar (Kąkol, 2011):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (1)$$

gdzie α jest kątem między wektorami, a, b są wartościami (długościami) wektorów, liczonymi za pomocą wzoru:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (2)$$

Jeżeli kąt między wektorami $\alpha = 90^\circ$ to iloczyn skalarny dwóch wektorów jest równy zero:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \quad \cos 90^\circ = 0 \quad (3)$$

Wektory, których iloczyn skalarny jest równy zero są do siebie prostopadłe:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad (4)$$



Jeżeli kąt między wektorami $\alpha = 0^0$ lub $\alpha = 180^0$ to wektory są równoległe. Iloczyn skalarny jest przemienny:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (5)$$

oraz rozdzielny względem dodawania:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \quad (6)$$

Iloczyn skalarny jest często stosowany do opisu wielkości fizycznych, np. praca mechaniczna jest iloczynem skalarnym wektora siły i wektora przemieszczenia (Kąkol, 2011):

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs \cos \alpha \quad (7)$$

2.2. Iloczyn wektorowy

W wyniku iloczynu wektorowego dwóch wektorów dostajemy wektor prostopadły do danych wektorów. Zapis analityczny iloczynu wektorowego (Halliday, 2015):

$$\begin{aligned} \vec{p} = \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \vec{j}(-a_x b_z + a_z b_x) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x) = \\ &= \vec{i} p_x + \vec{j} p_y + \vec{k} p_z \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie:

$\vec{i}(1,0,0)$; $\vec{j}(0,1,0)$; $\vec{k}(0,0,1)$ - wersory na osiach Ox, Oy, Oz .

Długość wektora wynikowego z iloczynu wektorowego można obliczyć jako:

$$p = ab \sin \alpha \quad (9)$$

Iloczyn wektorowy jest rozdzielny względem dodawania:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \quad (10)$$



i antysymetryczny – zmiana kolejności wektorów w iloczynie prowadzi do zmiany znaku wyniku:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \quad (11)$$

Przykładem iloczynu wektorowego w fizyce jest np. moment siły, czyli iloczyn wektorowy ramienia siły i wektora siły (Leyko, 2013):

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (12)$$

2.3. Iloczyn mieszany

Iloczyn mieszany trzech wektorów $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ to liczba $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ określona wzorem:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad (13)$$

Iloczyn mieszany jest wyznacznikiem macierzy, której wiersze są współrzędnymi tych wektorów (Kąkol, 2011):

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = a_x b_y c_z + a_y b_z c_x + a_z b_x c_y - a_z b_y c_x - b_z c_y a_x - c_z a_y b_x \quad (14)$$

2.4. Przykładowe zadania

- Zadanie 1**

Znajdź wektor $\vec{b}$ o długości $|\vec{b}| = 4$ leżący w płaszczyźnie XZ i prostopadły do wektora $\vec{a} = [1, 3, 2]$.

Rozwiązanie:

Wektor $\vec{b}$ leży w płaszczyźnie XZ, zatem jego współrzędne wynoszą odpowiednio:

$\vec{b} = [x, 0, z]$, a jego długość $|\vec{b}| = \sqrt{x^2 + z^2} = 4$.



Wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są do siebie prostopadłe, gdy ich iloczyn skalarny jest równy zero:

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = ab \cos \alpha = b_x a_x + b_y a_y + b_z a_z = 0 \quad (15)$$

Zatem

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = x + 2z = 0$$

Współrzędne wektora $\vec{b}$ znajdziemy z układu równań

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ \sqrt{x^2 + z^2} = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2z \\ x^2 + z^2 = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2z \\ (-2z)^2 + z^2 = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2z \\ 5z^2 = 16 \end{cases}$$

Ostatecznie

$$\begin{cases} x = \frac{-8}{\sqrt{5}} \\ z = \frac{4}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Odpowiedź: Wektor $\vec{b}$ ma współrzędne: $\vec{b} = \left[\frac{-8}{\sqrt{5}}, 0, \frac{4}{\sqrt{5}} \right]$.



- Zadanie 2**

Znajdź wektor $\vec{b}$ o długości $|\vec{b}| = 5$ leżący w płaszczyźnie XY i prostopadły do wektora $\vec{a} = [3, 2, 1]$.

Odpowiedź: $\vec{b} = \left[\frac{-10}{\sqrt{13}}, \frac{15}{\sqrt{13}}, 0 \right]$.

- Zadanie 3**

Oblicz współrzędną z wektora $\vec{a}$, aby podane trzy wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ leżały w jednej płaszczyźnie. Jaki kąt tworzy wektor $\vec{a}$ z wektorem $\vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$?

$$\vec{a} = [1, 2, z], \vec{b} = [-1, 2, 3], \vec{c} = [2, -1, -3].$$

Rozwiązanie:

I sposób

Wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ leżą w jednej płaszczyźnie, gdy iloczyn mieszany jest równy zero:

$$[\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0 \quad (16)$$

Obliczamy iloczyn wektorowy wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ze wzoru (8):

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \vec{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x) \quad (17)$$

Zatem

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & z \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}(2 \cdot 3 - z \cdot 2) + \vec{j}(z \cdot (-1) - 1 \cdot 3) + \vec{k}(1 \cdot 2 - (-1) \cdot 2) = \\ &= \vec{i}(6 - 2z) + \vec{j}(-z - 3) + \vec{k}(4) \end{aligned}$$

Wektor $\vec{a} \times \vec{b}$ o współrzędnych:

$$\vec{a} \times \vec{b} = [6 - 2z, -z - 3, 4]$$



mnożymy skalarnie z wektorem $\vec{c}$:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (6 - 2z) \cdot 2 + (-z - 3) \cdot (-1) + 4(-3) = 0$$

Obliczamy współrzędną z wektora $\vec{a}$:

$$(6 - 2z) \cdot 2 + (-z - 3) \cdot (-1) + 4(-3) = 0$$

$$12 - 4z + z + 3 - 12 = 0$$

Stąd

$$z = 1$$

Wektor $\vec{a}$ ma współrzędne: $\vec{a} = [1, 2, 1]$. Współrzędne wektora $\vec{d}$ obliczamy sumując wektory $\vec{b} + \vec{c}$:

$$\vec{d} = \vec{b} + \vec{c} = [1, 1, 0]$$

II sposób

Wyznaczamy współrzędną z ze wzoru (14):

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & z \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 3 \cdot 2 + z \cdot (-1) \cdot (-1) - z \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) \cdot 1 - (-3) \cdot 2 \cdot (-1)$$

$$-6 + 12 + z - 4z + 3 - 6 = 0$$

Stąd $z = 1$.

Kąt między wektorami $\vec{a}$ oraz $\vec{d}$ obliczamy z iloczynu skalarnego tych wektorów (1):

$$\cos \alpha = \frac{a_x d_x + a_y d_y + a_z d_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{d}|} \quad (18)$$

Gdzie $|\vec{a}|$, $|\vec{d}|$ to wartości (długości) wektorów:



$$|\vec{a}| = a = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Ostatecznie

$$\cos \alpha = \frac{1+2+0}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Odpowiedź: Współrzędna $z=3$, natomiast kąt $\alpha = 30^\circ$.

• Zadanie 4

Dane są trzy wektory: $\vec{a} = [x, 2, z]$, $\vec{b} = [-1, 4, -2]$, $\vec{c} = [2, -2, 1]$. Znaleźć współrzędne x oraz z , dla których $\vec{a} \perp \vec{b}$ i $\vec{a} \perp \vec{c}$.

Rozwiązanie:

Wektory są do siebie prostopadłe, gdy ich iloczyn skalarny jest równy zero:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ oraz } \vec{a} \cdot \vec{c} = 0.$$

Obliczamy iloczyn skalarny wektorów:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x \cdot (-1) + 2 \cdot 4 + z \cdot (-2) = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = x \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + z \cdot 1 = 0$$

Budując układ równań wyznaczamy niewiadome x i z :

$$\begin{cases} -x + 8 - 2z = 0 \\ 2x - 4 + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 8 - 2z \\ 2(8 - 2z) - 4 + z = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = 8 - 2z \\ 16 - 4z - 4 + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 8 - 2z \\ -3z = -12 \end{cases}$$

Ostatecznie

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 4 \end{cases}$$

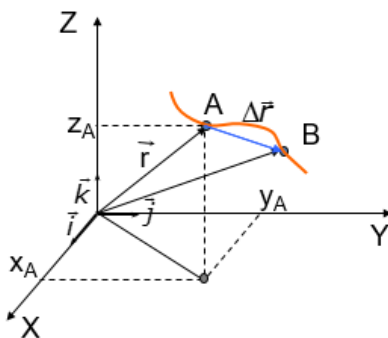
Odpowiedź: Wektor $\vec{a}$ ma współrzędne: $\vec{a} = [0, 2, 4]$.

3. Prędkość chwilowa i przyspieszenie chwilowe

Prędkość chwilowa to wektorowa wielkość fizyczna, która opisuje jak szybko i w jakim kierunku porusza się obiekt w danym momencie czasu. Można ją zdefiniować jako pochodną wektora promienia wodzącego $\vec{r}$ względem czasu (Ling 2018):

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) \quad (19)$$

Promień wodzący to wektor łączący początek układu współrzędnych z wybranym punktem na torze, opisujący położenie tego punktu (Leyko, 2013):



Rys. 1. Promień wodzący $\vec{r}$

Wartość prędkości chwilowej jest to pochodna drogi względem czasu:



$$v(t) = \frac{d}{dt} s(t) \left[\frac{m}{s} \right] \quad (20)$$

Przyspieszenie chwilowe to również wektorowa wielkość fizyczna, która określa, jak szybko zmienia się prędkość obiektu w danym momencie czasu. Można je zdefiniować jako pochodną wektora prędkości względem czasu lub drugą pochodną wektora promienia wodzącego względem czasu (Ling 2018):

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2} s(t) \quad (21)$$

Wartość przyspieszenia chwilowego jest to pochodna wartości prędkości względem czasu lub druga pochodna drogi względem czasu:

$$a(t) = \frac{d}{dt} v(t) = \frac{d^2}{dt^2} s(t) \left[\frac{m}{s^2} \right] \quad (22)$$

3.1. Przykładowe zadania

- Zadanie 5**

Dany jest wektor wodzący $\vec{r}(t)$. Oblicz wektor prędkość i wektor przyspieszenia.

$$\vec{r}(t) = \vec{i} [3t^2 - t] + \vec{j} [-4t^3 + 1] + \vec{k} [4 - 2t]$$

Rozwiązanie:

Wektor wodzący zapiszemy jako sumę składowych:

$$\vec{r}(t) = \vec{i} r_x + \vec{j} r_y + \vec{k} r_z$$

Wektor $\vec{r}$ ma następujące współrzędne:

$$r_x = 3t^2 - t \quad r_y = -4t^3 + 1 \quad r_z = 4 - 2t$$

Wektor prędkości chwilowej obliczamy ze wzoru (19): $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$



$$\vec{v}(t) = [v_x, v_y, v_z]$$

gdzie

$$\vec{v}(t) = \left[v_x = \frac{dr_x}{dt}, v_y = \frac{dr_y}{dt}, v_z = \frac{dr_z}{dt} \right]$$

Liczymy pochodne współrzędnych wektora wodzącego względem czasu:

$$v_x = \frac{dr_x}{dt} = 6t - 1 \quad v_y = \frac{dr_y}{dt} = -12t^2 \quad v_z = \frac{dr_z}{dt} = -2$$

Otrzymujemy wektor prędkości chwilowej o współrzędnych:

$$\vec{v}(t) = [6t - 1, -12t^2, -2]$$

Wektor przyspieszenia chwilowego obliczamy ze wzoru (21):

$$\vec{a}(t) = [a_x, a_y, a_z]$$

gdzie

$$\vec{a}(t) = \left[a_x = \frac{dv_x}{dt}, a_y = \frac{dv_y}{dt}, a_z = \frac{dv_z}{dt} \right]$$

Liczymy pochodne współrzędnych wektora prędkości względem czasu:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 6 \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -24t \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = 0$$

Otrzymujemy wektor przyspieszenia chwilowego o współrzędnych:

$$\vec{a}(t) = [6, -24t, 0]$$



Odpowiedź: Wektor prędkości: $\vec{v}(t) = [6t - 1, -12t^2, -2]$, wektor przyspieszenia:
 $\vec{a}(t) = [6, -24t, 0]$.

• Zadanie 6

Dany jest wektor wodzący $\vec{r}(t)$. Oblicz wektor prędkość i wektor przyspieszenia.

$$\vec{r}(t) = \vec{i} \left[\frac{4}{\pi} \sin(\pi t) \right] + \vec{j} \left[\frac{2}{\pi} \cos(\pi t) \right] + \vec{k} [\pi t]$$

Rozwiązanie:

Wektor wodzący zapiszemy jako sumę składowych:

$$\vec{r}(t) = \vec{i}r_x + \vec{j}r_y + \vec{k}r_z$$

Wektor $\vec{r}$ ma następujące współrzędne:

$$r_x = \frac{4}{\pi} \sin(\pi t) \quad r_y = \frac{2}{\pi} \cos(\pi t) \quad r_z = \pi t$$

Wektor prędkości chwilowej obliczamy ze wzoru (19):

$$\vec{v}(t) = [v_x, v_y, v_z]$$

gdzie

$$\vec{v}(t) = \left[v_x = \frac{dr_x}{dt}, v_y = \frac{dr_y}{dt}, v_z = \frac{dr_z}{dt} \right]$$

Liczymy pochodne współrzędnych wektora wodzącego względem czasu:

$$v_x = \frac{dr_x}{dt} = 4 \cos(\pi t) \quad v_y = \frac{dr_y}{dt} = -2 \sin(\pi t) \quad v_z = \frac{dr_z}{dt} = \pi$$

Otrzymujemy wektor prędkości chwilowej o współrzędnych:

$$\vec{v}(t) = (4 \cos(\pi t), -2 \sin(\pi t), \pi)$$



Wektor przyspieszenia chwilowego obliczamy ze wzoru (21):

$$\vec{a}(t) = [a_x, a_y, a_z]$$

gdzie

$$\vec{a}(t) = \left[a_x = \frac{dv_x}{dt}, a_y = \frac{dv_y}{dt}, a_z = \frac{dv_z}{dt} \right]$$

Liczymy pochodne współrzędnych wektora prędkości względem czasu:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -4\pi \sin(\pi t) \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -2\pi \cos(\pi t) \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = 0$$

Otrzymujemy wektor przyspieszenia chwilowego o współrzędnych:

$$\vec{a}(t) = [-4\pi \sin(\pi t), -2\pi \cos(\pi t), 0]$$

Odpowiedź: Wektor prędkości: $\vec{v}(t) = [4 \cos(\pi t), -2 \sin(\pi t), \pi]$, wektor przyspieszenia: $\vec{a}(t) = [-4\pi \sin(\pi t), -2\pi \cos(\pi t), 0]$.

• Zadanie 7

Dany jest wektor wodzący $\vec{r}(t)$. Oblicz wektor prędkość i wektor przyspieszenia.

a) $\vec{r}(t) = \vec{i}[-2t^4 + 3t] + \vec{j}[-3t^2 - 5] + \vec{k}[4 + 2t]$

Odpowiedź: $\vec{v}(t) = [-8t^3 + 3, -6t, 2]$, $\vec{a}(t) = [-24t^2, -6, 0]$.

b) $\vec{r}(t) = \vec{i}\left[\frac{1}{4}\sin(2t)\right] + \vec{j}[3 - 2t] + \vec{k}\left[-\frac{1}{2}\cos(2t)\right]$

Odpowiedź: $\vec{v}(t) = \left[\frac{1}{2}\cos(2t), -2, \sin(2t)\right]$, $\vec{a}(t) = [-\sin(2t), 0, 2\cos(2t)]$.



- Zadanie 8**

Ruch prostoliniowy punktu materialnego dany jest równaniem $S(t) = t^3 + 2t^2 - 3t + 4$, $S[m]$, $t[s]$. Wyznaczyć położenie, prędkość oraz przyspieszenie punktu odpowiednio w chwilach $t_0 = 0$, $t_1 = 1[s]$ i $t_2 = 2[s]$.

Rozwiązanie:

Zaczynamy od wyznaczenia położenia w poszczególnych chwilach. Do równania na drogę za czas podstawiamy odpowiednio podane chwile:

$$S(t_0) = 4[m]$$

$$S(t_1) = 1 + 2 - 3 + 4 = 4[m]$$

$$S(t_2) = 8 + 8 - 6 + 4 = 14[m]$$

Wartość prędkości chwilowej obliczamy ze wzoru (20), licząc pochodną drogi względem czasu:

$$v(t) = \frac{d}{dt} S(t) = 3t^2 + 4t - 3 \left[\frac{m}{s} \right]$$

Kolejnym krokiem jest wyznaczenie prędkości w poszczególnych chwilach:

$$v(t_0) = -3 \left[\frac{m}{s} \right]$$

$$v(t_1) = 3 + 4 - 3 = 4 \left[\frac{m}{s} \right]$$

$$v(t_2) = 12 + 8 - 3 = 17 \left[\frac{m}{s} \right]$$

Wartość przyspieszenia chwilowego obliczymy na podstawie wzoru (22), licząc pochodną wartości prędkości względem czasu



$$a(t) = \frac{d}{dt} v(t) = 6t + 4 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

Wyznaczamy wartość przyspieszenia w poszczególnych chwilach:

$$a(t_0) = 4 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

$$a(t_1) = 6 + 4 = 10 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

$$a(t_2) = 12 + 4 = 16 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

4. Analiza ruchu punktu materialnego

Przedmiotem działań dynamiki jest ruch ciał pod wpływem sił, które ten ruch wywołały. Do najważniejszych praw z zakresu dynamiki należą trzy zasady sformułowane przez Isaaka Newtona, znajdujące zastosowanie we wszystkich przypadkach ruchu ciał poruszających się z prędkościami dużo mniejszymi od prędkości światła. Na podstawie sił działających na punkt materialny można sformułować równania ruchu, pozwalające przewidzieć jego położenie w czasie.

4.1. Równania ruchu

Do rozwiązywania równań ruchu służą metody matematyczne: różniczkowanie i całkowanie. Różniczkując funkcję położenia od czasu, otrzymujemy zależności prędkości od czasu (19). Obliczając pochodną prędkości względem czasu dostaniemy funkcję przyspieszenia od czasu (21). W tym rozdziale przejdziemy odwrotną drogę dzięki całkowaniu. Znając przyspieszenie obliczymy prędkość, całkując prędkość obliczymy położenie w funkcji czasu.

Korzystamy z równania (21) zapisanego w postaci

$$\frac{d}{dt} v(t) = a(t) \quad (23)$$

Całkujemy obustronnie po czasie



$$\int \frac{d}{dt} v(t) dt = \int a(t) dt + C_1 \quad (24)$$

gdzie C_1 stała całkowania (występuje w całkach nieoznaczonych).

Ponieważ lewa strona równania (24) wynosi $v(t)$, zatem prędkość definiujemy jako

$$v(t) = \int a(t) dt + C_1 \quad (25)$$

Do powyższego równania za prędkości wstawiamy pochodną położenia po czasie zgodnie z równaniem (20) i po scałkowaniu otrzymamy położeniu w funkcji czasu

$$S(t) = \int v(t) dt + C_2 \quad (26)$$

gdzie C_2 stała całkowania.

Aby otrzymać kinetyczne równia ruchu ze stałym przyspieszeniem piszemy, że $a(t) = a$ ma stałą wartość. Obliczamy całkę (25)

$$v(t) = at + C_1 \quad (27)$$

Z równania (26) obliczamy położenie

$$S(t) = \int (at + C_1) dt = \frac{at^2}{2} + C_1 t + C_2 \quad (28)$$

Stałe całkowania obliczamy z warunków początkowych. Zakładamy, że w chwili początkowej prędkość wynosiła v_0 natomiast położenie S_0 , co zapisujemy następująco:

$$t = 0, \quad v(0) = v_0, \quad S(0) = S_0 \quad (29)$$

Na początek liczymy stałą całkowania C_1 podstawiając warunki początkowe do równania (27) i otrzymujemy:

$$v_0 = a \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = v_0 \quad (30)$$



Analogicznie liczymy stałą całkowania C_2 z równania (28)

$$S_0 = \frac{a \cdot 0^2}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = S_0 \quad (31)$$

Kinetyczne równania ruchu ze stałym przyspieszeniem mają postać:

$$v(t) = v_0 + at \quad (32)$$

$$S(t) = S_0 + vt + \frac{at^2}{2} \quad (33)$$

4.2. Przykładowe zadania

• Zadanie 8

Samochód ciężarowy ruszył z miejsca z przyspieszeniem $a(t) = (4 - 2t) \left[\frac{m}{s^2} \right]$. Oblicz prędkość samochodu i położenie w funkcji czasu.

Rozwiązanie:

Do wyznaczenia prędkości samochodu wykorzystamy równanie (25). Całkujemy podane przyspieszenie:

$$v(t) = \int (4 - 2t) dt = 4t - t^2 + C_1$$

Do wyznaczenia położenia w funkcji czasu zastosujemy równanie (26)

$$S(t) = \int (4t - t^2 + C_1) dt = 2t^2 - \frac{t^3}{3} + C_1 t + C_2$$

Stałe całkowania C_1 i C_2 wyznaczymy z warunków początkowych. Ponieważ samochód ruszył z miejsca jego prędkość początkowa i położenie były równe zero:

$$t = 0, \quad v(0) = 0, \quad S(0) = 0$$



Zatem

$$C_1 = 0 \quad \text{i} \quad C_2 = 0$$

Ostatecznie prędkość i położenie w funkcji czasu mają postać:

$$v(t) = -t^2 + 4t \left[\frac{m}{s} \right]$$
$$S(t) = -\frac{t^3}{3} + 2t^2 [m]$$

• Zadanie 9

Rowerzysta jedzie ze stałą prędkością równą $14,4 \left[\frac{km}{h} \right]$. W momencie, gdy zaczyna

hamować doznaje przyspieszenia zależnego od czasu $a(t) = -\frac{3}{2}t \left[\frac{m}{s^2} \right]$. Oblicz

- a) prędkość w funkcji czasu rowerzysty,
- b) położenie rowerzysty w funkcji czasu,
- c) czas, w którym prędkość rowerzysty spada do zera,
- d) drogę o jaką przemieści się rowerzysta od momentu rozpoczęcia hamowania (chwila początkowa równa 0) do chwili, w której prędkość rowerzysty spada do zera.

Rozwiązanie:

Zanim przystąpimy do rozwiązywania zadania musimy zamienić jednostkę prędkości:

$$14,4 \frac{km}{h} = 14,4 \frac{1000 m}{3600 s} = 4 \frac{m}{s}$$

- a) W celu wyznaczenia prędkości rowerzysty całkujemy podane przyspieszenie:

$$v(t) = \int \left(-\frac{3}{2}t \right) dt = -\frac{3}{4}t^2 + C_1$$



- b) Położenie rowerzysty w funkcji czasu znajdziemy całkując otrzymaną prędkość:

$$S(t) = \int \left(-\frac{3}{4}t^2 + C_1 \right) dt = -\frac{1}{4}t^3 + C_1 t + C_2$$

Stałe całkowania C_1 i C_2 wyznaczymy z warunków początkowych. Z treści zadania wynika, że prędkość początkowa wynosi $4 \left[\frac{m}{s} \right]$, a położenie przyjmujemy równe zero:

$$t = 0, \quad v(0) = 4, \quad S(0) = 0$$

Zatem na podstawie równań (30) i (31) otrzymujemy

$$C_1 = 4 \quad \text{ i } \quad C_2 = 0$$

Ostatecznie prędkość i położenie w funkcji czasu mają postać:

$$v(t) = -\frac{3}{4}t^2 + 4 \left[\frac{m}{s} \right] \quad (34)$$

$$S(t) = -\frac{1}{4}t^3 + 4t [m] \quad (35)$$

- c) Żeby obliczyć czas w którym prędkość rowerzysty spadnie do zera, w równaniu (34) podstawiamy prędkość końcową równą zero (rowerzysta się zatrzyma)

$$0 = -\frac{3}{4}t^2 + 4 \Rightarrow 4 = \frac{3}{4}t^2 \Rightarrow t = 2,3[s] \quad (36)$$

- d) Położenie początkowe przyjęliśmy równe zero, zatem aby znaleźć drogę, którą pokona rowerzysta od momentu rozpoczęcia hamowania należy znaleźć położenie po czasie, po którym prędkość spada do zera (35):



$$S(2,3) = -\frac{1}{4}(2,3)^3 + 4(2,3) = 6,2[m]$$

• **Zadanie 10**

Punkt materialny porusza się z podanym przyspieszeniem zmiennym w czasie. Dla zadanych warunków początkowych wyznacz równania ruchu tego punktu.

a) $a(t) = 4\sin(2t), \quad t=0, \quad v(0) = 2\left[\frac{m}{s}\right], \quad S(0) = 0$

b) $a(t) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \quad t=0, \quad v(0) = 0, \quad S(0) = 2[m]$

c) $a(t) = -4\cos(4t) \quad t=0, \quad v(0) = 1\left[\frac{m}{s}\right], \quad S(0) = 1[m]$

d) $a(t) = -2\sin(\pi t) \quad t=0, \quad v(0) = 0, \quad S(0) = 0$

Rozwiązanie:

a) Obliczamy prędkość w funkcji czasu na podstawie wzoru (25):

$$v(t) = \int 4\sin(2t) dt = -4\cos(2t) \cdot \frac{1}{2} + C_1 = -2\cos(2t) + C_1$$

Do wyznaczenia położenia w funkcji czasu zastosujemy równanie (26)

$$S(t) = \int (-2\cos(2t) + C_1) dt = -2\sin(2t) \cdot \frac{1}{2} + C_1 t + C_2 = -\sin(2t) + C_1 t + C_2$$

Stałe całkowania C_1 i C_2 wyznaczmy z podanych warunków początkowych:

$$t=0, \quad v(0) = 2\left[\frac{m}{s}\right], \quad S(0) = 0$$

Zatem

$$2 = -2\cos(0) + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 4$$



$$0 = -\sin(0) + C_1 \cdot 0 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

Ostatecznie prędkość i położenie w funkcji czasu mają postać:

$$v(t) = -2 \cos(2t) + 4 \left[\frac{m}{s} \right]$$

$$S(t) = -\sin(2t) + 4t [m]$$

b) Obliczamy prędkość w funkcji czasu na podstawie wzoru (25):

$$v(t) = \int \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) dt = \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \cdot \frac{4}{\pi} + C_1 = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) + C_1$$

Obliczamy kolejną całkę licząc położenie:

$$S(t) = \int \left(2 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) + C_1 \right) dt = -2 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \cdot \frac{4}{\pi} + C_1 t + C_2 = -\frac{8}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + C_1 t + C_2$$

Stałe całkowania C_1 i C_2 wyznaczymy z podanych warunków początkowych:

$$t = 0, \quad v(0) = 0, \quad S(0) = 2[m]$$

Zatem

$$0 = 2 \sin(0) + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

$$2 = -\frac{8}{\pi} \cos(0) + C_1 \cdot 0 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 2 + \frac{8}{\pi}$$

Ostatecznie prędkość i położenie w funkcji czasu mają postać:

$$v(t) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \left[\frac{m}{s} \right]$$



$$S(t) = -\frac{8}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 2 + \frac{8}{\pi} = 2 + \frac{8}{\pi} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right) [m]$$

c) Obliczamy prędkość w funkcji czasu na podstawie wzoru (25):

$$v(t) = \int -4 \cos(4t) dt = -4 \sin(4t) \cdot \frac{1}{4} + C_1 = -\sin(4t) + C_1$$

Do wyznaczenia położenia w funkcji czasu zastosujemy równanie (26)

$$S(t) = \int (-\sin(4t) + C_1) dt = \cos(4t) \cdot \frac{1}{4} + C_1 t + C_2 = \frac{1}{4} \cos(4t) + C_1 t + C_2$$

Stałe całkowania C_1 i C_2 wyznaczmy z podanych warunków początkowych:

$$t = 0, \quad v(0) = 1 \left[\frac{m}{s} \right], \quad S(0) = 1 [m]$$

Zatem

$$1 = -\sin(0) + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1$$

$$1 = \frac{1}{4} \cos(0) + C_1 \cdot 0 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{3}{4}$$

Ostatecznie prędkość i położenie w funkcji czasu mają postać:

$$v(t) = -\sin(4t) + 1 \left[\frac{m}{s} \right]$$

$$S(t) = \frac{1}{4} \cos(4t) + t + \frac{3}{4} [m]$$

d) Odpowiedź:

$$v(t) = \frac{2}{\pi} \cos(\pi t) - 2 \left[\frac{m}{s} \right]$$



$$S(t) = \frac{2}{\pi^2} \sin(\pi t) - 2t [m]$$

• **Zadanie 11**

Punkt materialny porusza się z przyspieszeniem $\vec{a}[a_x, a_y]$ w $\left[\frac{m}{s^2}\right]$ i zadanych warunkach początkowych. Wyznacz równanie ruchu punktu.

$$\begin{cases} a_x(t) = 4t, & t = 0, & v_x(0) = 0, & x(0) = 0 \\ a_y(t) = 0, & t = 0, & v_y(0) = 0, & y(0) = 2[m] \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Ponieważ mamy podany wektor przyspieszenia, obliczamy wektor prędkości $\vec{v}[v_x, v_y]$ całkując poszczególne współrzędne względem czasu:

$$\begin{cases} v_x(t) = \int a_x dt = \int 4t dt = 2t^2 + C_1 \\ v_y(t) = \int a_y dt = \int 0 dt = D_1 \end{cases}$$

gdzie C_1 i D_1 stałe całkowania, które wyznaczymy z podanych warunków początkowych:

$$\begin{cases} 0 = C_1 \\ 0 = D_1 \end{cases}$$

Współrzędne wektora prędkości $\vec{v}$

$$\begin{cases} v_x(t) = 2t^2 \\ v_y(t) = 0 \end{cases}$$

co można zapisać w postaci: $\vec{v} = [2t^2, 0]$.

Wyznaczamy współrzędne wektora położenia



$$\begin{cases} x(t) = \int v_x(t) dt = \int 2t^2 dt = \frac{2}{3}t^3 + C_2 \\ y(t) = \int v_y(t) dt = \int 0 dt = D_2 \end{cases}$$

Wyznaczamy stałe całkowania

$$\begin{cases} 0 = C_2 \\ 2 = D_2 \end{cases}$$

Otrzymujemy współrzędne wektora położenia

$$\begin{cases} x(t) = \frac{2}{3}t^3 \\ y(t) = 2 \end{cases}$$

który można zapisać w postaci $\vec{r} = \left[\frac{2}{3}t^3, 2 \right]$.

Literatura

1. Halliday D., Resnick R., Walker J. (2015). *Podstawy fizyki*. Wydawnictwo Naukowe PWN SA Warszawa.
2. Kąkol Z. (2011). *Fizyka*. Akademia Górniczo-Hutnicza. Kraków
3. Leyko J. (2013). *Mechanika ogólna. Tom 1*. Wydawnictwo Naukowe PWN SA Warszawa.
4. Ling S. J., Sanny J., Moebis W. (2018). *Fizyka dla szkół wyższych. Tom 1*, Openstax Polska.

