



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



Politechnika Świętokrzyska
Wydział Zarządzania i Modelowania Komputerowego

Kierunek studiów:
Inżynieria danych

Leszek Hożejowski

Materiały dydaktyczne do przedmiotu

MATEMATYKA DYSKRETNA

opracowane w ramach realizacji Projektu
**„Dostosowanie kształcenia
w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb
współczesnej gospodarki”**
FERS.01.05-IP.08-0234/23

Kielce, 2025





Spis treści

| | |
|--|----|
| 1. Wstęp..... | 4 |
| 2. Metoda zero-jedynkowa dowodzenia tautologii..... | 4 |
| 2.1. Zadanie przykładowe | 4 |
| 2.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania | 7 |
| 3. Własności relacji dwuargumentowych..... | 7 |
| 3.1. Zadania przykładowe | 7 |
| 3.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania | 8 |
| 4. Dowody indukcyjne | 9 |
| 4.1. Zadania przykładowe | 9 |
| 4.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania | 12 |
| 5. Liniowe równania rekurencyjne..... | 12 |
| 5.1. Zadania przykładowe | 12 |
| 5.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania | 14 |
| 6. Najkrótsza ścieżka w grafie nieskierowanym | 14 |
| 6.1. Zadanie przykładowe | 15 |
| 6.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania | 22 |
| 7. Analiza ścieżki krytycznej w sieci zależności | 23 |
| 7.1. Zadanie przykładowe | 24 |
| 7.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania | 29 |
| 8. Maksymalny przepływ w sieci transportowej..... | 30 |
| 8.1. Zadanie przykładowe | 30 |
| 8.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania | 34 |
| 9. Odpowiedzi do zadań..... | 35 |
| 9.1. Odpowiedzi do rozdziału 2 | 35 |
| 9.2. Odpowiedzi do rozdziału 3 | 36 |
| 9.3. Odpowiedzi do rozdziału 4 | 36 |
| 9.4. Odpowiedzi do rozdziału 5 | 36 |
| 9.5. Odpowiedzi do rozdziału 6 | 38 |
| 9.6. Odpowiedzi do rozdziału 7 | 39 |
| 9.7. Odpowiedzi do rozdziału 8 | 40 |





Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego

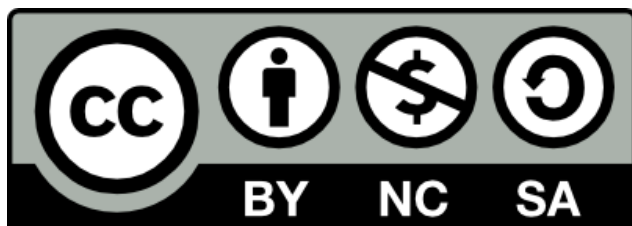


Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



10. Literatura..... 41



Utwór autorstwa Leszka Hożejowskiego objęty licencją Creative Commons BY-NC-SA 4.0.

Licencja dostępna pod adresem: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>





1. Wstęp

Niniejsze materiały dydaktyczne zostały pomyślane jako dość obszerna instrukcja rozwiązywania wybranych typów zadań, z jakimi spotykają się studenci Wydziału Zarządzania i Modelowania Komputerowego Politechniki Świętokrzyskiej uczestniczący w kursie matematyki dyskretnej.

Jako materiały pomocnicze, nie zawierają one zestawienia potrzebnych wiadomości teoretycznych z poszczególnych działów matematyki dyskretnej, bo wiedzy tej ma dostarczyć przede wszystkim wykład i literatura przedmiotu, której wykaz zamieszczony jest na końcu opracowania. Tak więc zakłada się, że korzystający z tych instrukcji student zna matryce logiczne podstawowych funktorów logicznych, zna własności relacji dwuargumentowych itd.

2. Metoda zero-jedynkowa dowodzenia tautologii

Będziemy rozpatrywali problem polegający na zbadaniu metodą zero-jedynkową, czy podane wyrażenie zależne od kilku zmiennych zdaniowych jest tautologią rachunku zdań.

2.1. Zadanie przykładowe

Przykład. Czy wyrażenie $(r \wedge \sim p) \Rightarrow (q \Leftrightarrow p)$ jest tautologią?

Zbudujemy pełną matrycę logiczną dla rozpatrywanej formy zdaniowej. Ponieważ zależy ona od trzech zmiennych, należy rozpatrzeć 8 przypadków odpowiadających wszelkim możliwym wartościom logicznym zmiennych p , q i r . Użyjemy tradycyjnie „1” dla oznaczenia prawdy, zaś „0” – dla fałszu. Dobrze jest wypisywać wszystkie 8 przypadków według jakiegoś klucza, np. według wzrastającej (lub malejącej) liczby zer. Biorąc pod uwagę budowę danego wyrażenia, w matrycy logicznej wyodrębnimy osobną kolumnę dla wartości $\sim p$ oraz dla poszczególnych składowych wyrażenia, czyli $r \wedge \sim p$ oraz $q \Leftrightarrow p$, zaś w ostatniej kolumnie będziemy notować wartości logiczne całego wyrażenia. Otrzymamy zatem następującą matrycę, w której na początek wpisujemy wszystkie możliwe wartościowania zmiennych:



| p | q | r | $\sim p$ | $r \wedge \sim p$ | $q \Leftrightarrow p$ | $(r \wedge \sim p) \Rightarrow (q \Leftrightarrow p)$ |
|-----|-----|-----|----------|-------------------|-----------------------|---|
| 1 | 1 | 1 | | | | |
| 1 | 1 | 0 | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | | | |
| 0 | 1 | 1 | | | | |
| 1 | 0 | 0 | | | | |
| 0 | 1 | 0 | | | | |
| 0 | 0 | 1 | | | | |
| 0 | 0 | 0 | | | | |

Następnie wpisujemy wartości logiczne w kolejnych kolumnach, najpierw dla wyrażenia $\sim p$:

| p | q | r | $\sim p$ | $r \wedge \sim p$ | $q \Leftrightarrow p$ | $(r \wedge \sim p) \Rightarrow (q \Leftrightarrow p)$ |
|-----|-----|-----|----------|-------------------|-----------------------|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | | | |
| 1 | 1 | 0 | 0 | | | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | | | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | | | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | | | |
| 0 | 1 | 0 | 1 | | | |
| 0 | 0 | 1 | 1 | | | |
| 0 | 0 | 0 | 1 | | | |

Z kolei podajemy wartości dla $r \wedge \sim p$ pamiętając, że koniunkcja jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy oba jej człony są prawdziwe:

| p | q | r | $\sim p$ | $r \wedge \sim p$ | $q \Leftrightarrow p$ | $(r \wedge \sim p) \Rightarrow (q \Leftrightarrow p)$ |
|-----|-----|-----|----------|-------------------|-----------------------|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | | |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | | |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | | |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | | |



Następnie określamy wartości dla $q \Leftrightarrow p$, które wynoszą 1, gdy oba człony mają tę samą wartość logiczną, zaś 0 – w przeciwnym przypadku:

| p | q | r | $\sim p$ | $r \wedge \sim p$ | $q \Leftrightarrow p$ | $(r \wedge \sim p) \Rightarrow (q \Leftrightarrow p)$ |
|-----|-----|-----|----------|-------------------|-----------------------|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | |

Ostatni krok to wyznaczenie w ostatniej kolumnie wartości całego wyrażenia, które ma postać implikacji. Wpisujemy 0, jeżeli poprzednik implikacji jest prawdziwy a następnik fałszywy, zaś 1 – w pozostałych przypadkach. Pamiętajmy, że można zaprzestać wypełniania tabeli, gdy tylko w ostatniej kolumnie pojawi się zero, bo odpowiedź (negatywna) na postawione w zadaniu pytanie będzie już wiadoma, jednak *pro forma* wypełnimy tabelę do końca:

| p | q | r | $\sim p$ | $r \wedge \sim p$ | $q \Leftrightarrow p$ | $(r \wedge \sim p) \Rightarrow (q \Leftrightarrow p)$ |
|-----|-----|-----|----------|-------------------|-----------------------|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Zero, jakie pojawiło się w ostatniej kolumnie tabeli dowodzi, że badana forma zdaniowa nie jest zawsze prawdziwa, nie jest zatem tautologią.



2.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zbadać, czy następujące wyrażenia są tautologiami

1. $q \vee (p \wedge r \Rightarrow \sim q)$
2. $(p \wedge r) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$

3. Własności relacji dwuargumentowych

Zanim przystąpimy do przykładów badania własności relacji, zwróćmy uwagę, że niektóre spośród tych własności są różnie nazywane przez różnych autorów: relacja przeciwsymetryczna bywa nazywana asymetryczną. Podobnie jedna z własności określana jest jako antysymetria bądź słaba antysymetria. Mówi się też o relacjach porządku, które w innym ujęciu są relacjami częściowego porządku. Istnienie tego nieporządku terminologicznego potraktujmy jednak jako sprawę drugorzędą. Przy badaniu własności relacji warto natomiast mieć świadomość, że zwrotność i przeciwzwrotność, a także symetria i przeciwsymetria, wykluczają się nawzajem. Zatem gdy jakaś relacja ma jedną z tych własności, to nie może mieć drugiej.

3.1. Zadania przykładowe

Przykład 1. Zbadać własności relacji prostopadłości określonej w zbiorze prostych na ustalonej płaszczyźnie:

$$aRb \Leftrightarrow a \perp b \quad (1)$$

Czy relacja jest

- | | |
|--|-----|
| ➤ zwrotna, tzn. czy $\forall a \quad a \perp a$? | Nie |
| ➤ przeciwzwrotna, tzn. czy $\forall a \quad \sim(a \perp a)$? | Tak |
| ➤ symetryczna, tzn. czy $\forall a, b \quad a \perp b \Rightarrow b \perp a$? | Tak |
| ➤ antysymetryczna, tzn. czy $\forall a, b \quad a \perp b \wedge b \perp a \Rightarrow a = b$? | Nie |
| ➤ przechodnia, tzn. czy $\forall a, b, c \quad a \perp b \wedge b \perp c \Rightarrow a \perp c$? | Nie |
| ➤ spójna, tzn. czy $\forall a, b \quad a \perp b \vee b \perp a \vee a = b$? | Nie |

Zauważmy, że nie badaliśmy, czy relacja jest przeciwsymetryczna, bo wcześniej ustaliliśmy, że jest ona symetryczna.



Przykład 2. Zbadać własności relacji określonej na wszystkich podzbiorach zbioru liczb naturalnych:

$$ARB \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset \quad (2)$$

Czy relacja jest

- zwrotna, tzn. czy $\forall A \quad A \cap A \neq \emptyset$? Nie
- przeciwzwrotna, tzn. czy $\forall A \quad \sim(A \cap A \neq \emptyset)$? Nie
- symetryczna, tzn. czy $\forall A, B \quad A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow B \cap A \neq \emptyset$? Tak
- antysymetryczna, tzn. czy $\forall A, B \quad A \cap B \neq \emptyset \wedge B \cap A \neq \emptyset \Rightarrow A = B$? Nie
- przechodnia, tzn. czy $\forall A, B, C \quad A \cap B \neq \emptyset \wedge B \cap C \neq \emptyset \Rightarrow A \cap C \neq \emptyset$? Nie
- spójna, tzn. czy $\forall A, B \quad A \cap B \neq \emptyset \vee B \cap A \neq \emptyset \vee A = B$? Nie

Przykład 3. Zbadać własności relacji określonej na wszystkich wektorach przestrzeni trójwymiarowej:

$$\vec{u} R \vec{v} \Leftrightarrow |\vec{u}| \leq |\vec{v}|, \quad (3)$$

gdzie nierówność definiującą relację czytamy: wektor \vec{u} ma długość mniejszą lub równą niż wektor \vec{v} .

Czy relacja jest

- zwrotna, tzn. czy $\forall \vec{u} \quad |\vec{u}| \leq |\vec{u}|$? Tak
- symetryczna, tzn. czy $\forall \vec{u}, \vec{v} \quad |\vec{u}| \leq |\vec{v}| \Rightarrow |\vec{v}| \leq |\vec{u}|$? Nie
- przeciwsymetryczna, tzn. czy $\forall \vec{u}, \vec{v} \quad |\vec{u}| \leq |\vec{v}| \Rightarrow \sim(|\vec{v}| \leq |\vec{u}|)$? Nie
- antysymetryczna, tzn. czy $\forall \vec{u}, \vec{v} \quad |\vec{u}| \leq |\vec{v}| \wedge |\vec{v}| \leq |\vec{u}| \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$? Nie
- przechodnia, tzn. czy $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \quad |\vec{u}| \leq |\vec{v}| \wedge |\vec{v}| \leq |\vec{w}| \Rightarrow |\vec{u}| \leq |\vec{w}|$? Tak
- spójna, tzn. czy $\forall \vec{u}, \vec{v} \quad |\vec{u}| \leq |\vec{v}| \vee |\vec{v}| \leq |\vec{u}| \vee \vec{u} = \vec{v}$? Tak

3.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zbadać własności relacji określonych w podanych zbiorach.

1. $ARB \Leftrightarrow A \subset B$; określona na niepustych podzbiorach zbioru liczb rzeczywistych.
2. $xRy \Leftrightarrow x > y$; określona na zbiorze liczb całkowitych.





4. Dowody indukcyjne

Przeprowadzając dowód metodą indukcji matematycznej warto uwypuklić strukturę dowodu, by widoczne były poszczególne kroki: sprawdzenie prawdziwości twierdzenia dla pewnej początkowej wartości zmiennej naturalnej n (tzw. baza indukcji), a następnie przeprowadzenie kroku indukcyjnego i w końcu, po wykazaniu tezy indukcyjnej – powołanie się na zasadę indukcji matematycznej, która gwarantuje zachodzenie twierdzenia dla wszelkich podanych w twierdzeniu wartości n . Należy wystrzegać się popularnych komentarzy typu „Zakładamy, że twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnej liczby naturalnej $k \geq n_0$ ”, bo to oznaczałoby, że zakładamy coś, czego prawdziwości mamy dowieść. Poprawnie rzecz ujmując, zamierzamy wykazać prawdziwość implikacji, a to wcale nie wymaga, żeby poprzednik tej implikacji był prawdziwy.

4.1. Zadania przykładowe

Przykład 1. Udowodnić indukcyjnie, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ prawdziwy jest wzór

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (4)$$

Dowód. Sprawdzimy najpierw, że

1° dla $n = 2$ lewa strona wzoru (4) jest równa $1 + 2 = 3$, zaś prawa strona wynosi $\frac{2 \cdot 3}{2} = 3$, czyli wzór jest w tym przypadku prawdziwy.

Z kolei należy pokazać, że

2° dla dowolnej liczby naturalnej $k \geq 2$ prawdziwa jest implikacja

$$1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \Rightarrow 1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad (5)$$

Rozpisując sumę $1 + 2 + \dots + k + (k+1)$, na mocy założenia indukcyjnego zastąpimy $1 + 2 + \dots + k$ przez $k(k+1)/2$ i następnie sprowadzimy do wspólnego mianownika, otrzymując



$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \quad (6)$$

Wystarczy teraz wyłączyć wspólny czynnik $(k+1)$ przed nawias i dostaje się ułamek $(k+1)(k+2)/2$, czyli prawą stronę wzoru (5). Skoro implikacja (5) została wykazana, wnioskujemy na podstawie zasady indukcji matematycznej, że dany wzór (4) zachodzi dla dowolnego $n = 2, 3, \dots$

Przykład 2. Udowodnić indukcyjnie, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 3$ prawdziwa jest nierówność

$$n! > 2^n \quad (7)$$

Dowód. Sprawdzimy najpierw, że

1° dla $n = 4$ nierówność (7) zachodzi, bo $4! = 24 > 2^4 = 16$.

Z kolei należy pokazać, że

2° dla dowolnej liczby naturalnej $k \geq 4$ prawdziwa jest implikacja

$$k! > 2^k \Rightarrow (k+1)! > 2^{k+1} \quad (8)$$

Ponieważ $(k+1)! = k!(k+1)$, więc korzystając z założenia, że $k! > 2^k$, możemy napisać $k!(k+1) > 2^k(k+1) > 2^k \cdot 2$, a z własności potęg to ostatnie wyrażenie jest równe 2^{k+1} . Pokazaliśmy zatem, że nierówność $(k+1)! > 2^{k+1}$ rzeczywiście zachodzi i korzystając z zasady indukcji matematycznej możemy stwierdzić, że dana nierówność (8) jest prawdziwa dla dowolnego $n = 4, 5, \dots$

Przykład 3. Udowodnić indukcyjnie, że liczba postaci

$$3^{4n+2} + 1, \quad n \in \mathbb{N} \quad (9)$$

jest podzielna przez 10.



W notacji matematycznej podzielność tę zapisujemy następująco:

$$10|3^{4n+2} + 1 \quad (10)$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że

1° dla $n = 0$ liczba o której mowa w zadaniu ta wynosi $3^2 + 1 = 10$, czyli jest podzielna przez 10.

Teraz należy wykazać, że

2° dla dowolnej liczby naturalnej $k \geq 0$ zachodzi implikacja

$$10|3^{4k+2} + 1 \Rightarrow 10|3^{4(k+1)+2} + 1 \quad (11)$$

W tym celu rozpisujemy liczbę $3^{4(k+1)+2} + 1$ tak, by uzyskać odrębny człon wynoszący $3^{4k+2} + 1$, do którego będziemy mogli zastosować założenie indukcyjne:

$$3^{4(k+1)+2} + 1 = 3^{(4k+2)+4} = 3^4 \cdot 3^{4k+2} + 1 = 81 \cdot 3^{4k+2} + 1, \quad (12)$$

a ponieważ $81 = 80 + 1$, więc można dalej zapisać tę liczbę jako sumę

$$80 \cdot 3^{4k+2} + (3^{4k+2} + 1) \quad (13)$$

której oba składniki są podzielne przez 10 – pierwszy składnik w sposób oczywisty, a drugi na mocy założenia indukcyjnego. Skoro wykazaliśmy, że liczba $3^{4(k+1)+2} + 1$ jest podzielna przez 10, to powołując się na o zasadę indukcji matematycznej stwierdzamy, że rozważane twierdzenie jest prawdziwe dla wszelkich n naturalnych.



4.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Udowodnić indukcyjnie, że

- $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ dla $n = 1, 2, \dots$
- $13^n - 7$ jest podzielne przez 6 dla dowolnej liczby naturalnej n .

5. Liniowe równania rekurencyjne

Ciąg liczbowy może być w szczególności określony równaniem rekurencyjnym. Będziemy rozważali takie ciągi, których dwa pierwsze wyrazy są zadane, zaś każdy wyraz kolejny zależy w sposób liniowy od dwóch wyrazów bezpośrednio go poprzedzających, czyli

$$\begin{cases} u_0, u_1 - \text{znane} \\ u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (14)$$

gdzie a i b są stałymi. Pominiemy przypadki trywialne, gdy $a = 0$ lub $b = 0$.

Dla tego typu ciągu poszukiwać będziemy wzoru w postaci zwartej, tj. pozwalającej obliczyć dowolny wyraz ciągu, stosując skończoną i niezależną od n liczbę operacji arytmetycznych.

5.1. Zadania przykładowe

Przykład 1. Znaleźć zwartą postać wzoru ciągu zdefiniowanego podanym równaniem rekurencyjnym $u_0 = 4, u_1 = -1, u_n = 3u_{n-1} + 10u_{n-2}$.

Równanie charakterystyczne danej w zadaniu zależności rekurencyjnej ma postać

$$r^2 = 3r + 10 \quad (15)$$

Rozwiązując powyższe równanie kwadratowe otrzymujemy dwa pierwiastki rzeczywiste $r_1 = -2$ i $r_2 = 5$. Zatem szukany wzór zwarty będzie miał postać



$$u_n = C_1 \cdot (-2)^n + C_2 \cdot 5^n \quad (16)$$

Przyjmując we wzorze (16) kolejno $n = 0$ i $n = 1$ możemy napisać odpowiednie równania na nieznane współczynniki C_1 i C_2 :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 4 \\ -2C_1 + 5C_2 = -1 \end{cases} \quad (17)$$

Zauważmy, że prawe strony równań układu (17) to dane w zadaniu wyrazy ciągu, odpowiednio $u_0 = 4$ i $u_1 = -1$. Rozwiązanie tego układu równań nie nastręcza trudności; dostajemy $C_1 = 1$ oraz $C_2 = 3$. Zatem szukany wzór zwarty ma postać

$$u_n = (-2)^n + 3 \cdot 5^n \quad (18)$$

i jest on prawdziwy dla wszystkich n naturalnych.

Przykład 2. Znaleźć zwartą postać wzoru ciągu zdefiniowanego podanym równaniem rekurencyjnym $u_0 = 2, u_1 = 0, u_n = 6u_{n-1} - 9$.

Równanie charakterystyczne ma postać

$$r^2 = 6r - 9 \quad (19)$$

Nietrudno zauważyć, że jego wyróżnik $\Delta=0$, więc ma ono jeden pierwiastek podwójny $x_0 = 3$. W tym przypadku wyraz u_n ma postać

$$u_n = C_1 \cdot 3^n + C_2 n \cdot 3^n \quad (20)$$

Działając jak we wcześniejszym przykładzie, przyjmujemy kolejno $n = 0$ i $n = 1$, co daje w rezultacie układ równań



$$\begin{cases} C_1 = 2 \\ 3C_1 + 3C_2 = 0 \end{cases} \quad (21)$$

Rozwiązując go, otrzymujemy $C_1 = 2$ oraz $C_2 = -2$, co pozwala ostatecznie napisać wzór na u_n :

$$u_n = 2 \cdot 3^n - 2n \cdot 3^n \quad (22)$$

lub w bardziej przejrzystej postaci

$$u_n = (2 - 2n) \cdot 3^n \quad (23)$$

5.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Znaleźć zwartą postać ciągu określonego wzorem rekurencyjnym

1. $u_0 = 5, u_1 = -3, u_n = -2u_{n-1} + 3u_{n-2}$
2. $u_0 = -3, u_1 = 6, u_n = 12u_{n-1} - 36u_{n-2}$.

6. Najkrótsza ścieżka w grafie nieskierowanym

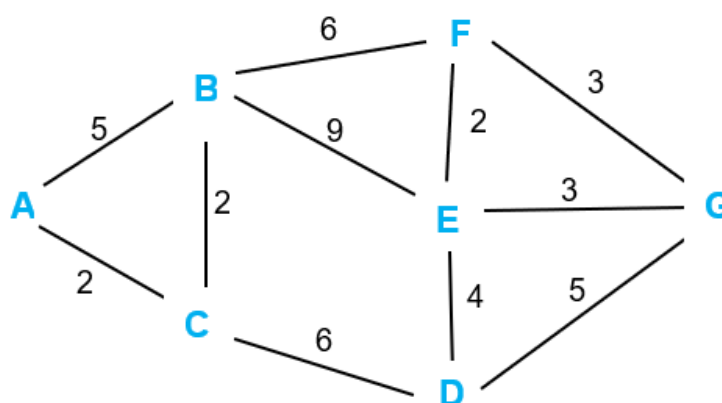
Będziemy poszukiwali najkrótszej drogi (ścieżki) pomiędzy dwoma wskazanymi wierzchołkami w grafie ważonym. Zastosujemy w tym celu algorytm Dijkstry. Z uwagi na ograniczenia tego algorytmu zakładamy, że wagi krawędzi są liczbami dodatnimi.



6.1. Zadanie przykładowe

Przykład. W grafie podanym na rys. 1 wyznaczyć najkrótszą drogę od wierzchołka A do G.

[Tekst alternatywny. Graf nieskierowany, składający się z 7 wierzchołków i 11 krawędzi. Niebieskie litery oznaczają wierzchołki. Liczby obok krawędzi (linii) oznaczają wagi tych krawędzi.]



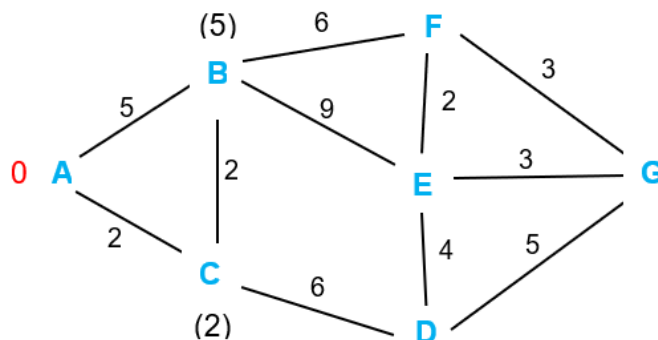
Rys.1. Graf ważony

Będziemy etykietować kolejne wierzchołki, nazywając te etykiety cechami stałymi (liczby stojące przy wierzchołku zapisane kolorem czerwonym) bądź tymczasowymi (liczby napisane w nawiasach).

W pierwszym kroku algorytmu wierzchołek początkowy A otrzymuje cechę stałą równą 0. Z kolei przeglądamy wszystkie wierzchołki połączone krawędzią z A i nadajemy im cechy tymczasowe: dla wierzchołka B – liczba 5, zaś dla wierzchołka C – liczba 2 (patrz: rys. 2).



[Tekst alternatywny. Graf nieskierowany z rys. 1, składający się z 7 wierzchołków i 11 krawędzi. Niebieskie litery oznaczają wierzchołki grafu, liczby obok krawędzi (linii) – wagi tych krawędzi, liczby w nawiasie obok wierzchołków – cechy tymczasowe tych wierzchołków, a czerwona liczba obok wierzchołka – cecha stała wierzchołka.]

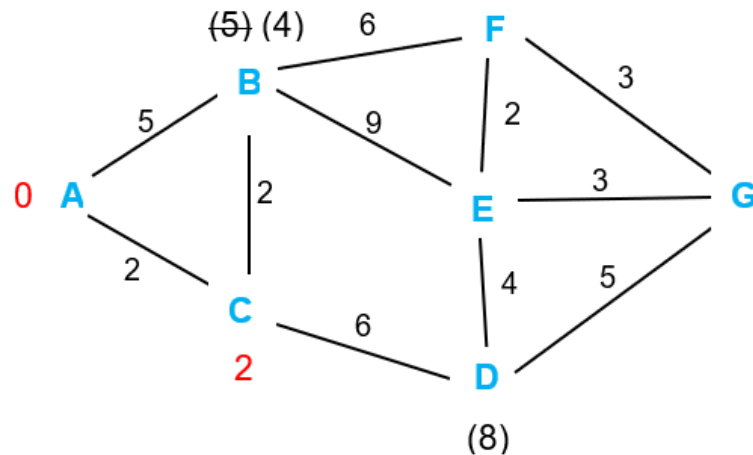


Rys. 2. Wyznaczanie najkrótszej ścieżki w grafie – krok 1.

Spośród cech tymczasowych wybieramy tę najmniejszą i zamieniamy ją na stałą. W naszym przypadku jest to cecha wierzchołka C, wynosząca 2. Przeglądamy teraz wierzchołki połączone z C i przypisujemy im cechy tymczasowe: dla D będzie to $2 + 6 = 8$, zaś dla B otrzymamy $2 + 2 = 4$. Zauważamy, B miał cechę tymczasową równą 5, więc w bieżącym kroku aktualizujemy ją, zmniejszając na 4 (patrz: rys. 3).



[Tekst alternatywny. Graf nieskierowany z rys. 2, składający się z 7 wierzchołków i 11 krawędzi. Niebieskie litery oznaczają wierzchołki grafu, liczby obok krawędzi – wagi tych krawędzi, przekreślone bądź nieprzekreślone liczby w nawiasie obok wierzchołków – odpowiednio aktualne bądź nieaktualne cechy tymczasowe tych wierzchołków. Czerwone liczby obok poszczególnych wierzchołków – cechy stałe tych wierzchołków.]

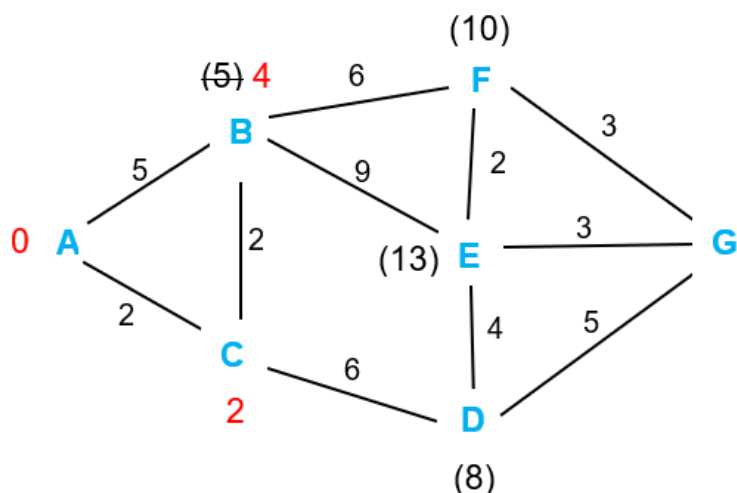


Rys. 3. Wyznaczanie najkrótszej ścieżki w grafie – krok 2.

Widzimy, że najmniejszą cechą tymczasową, wynoszącą 4, ma wierzchołek B. Staje się ona cechą stałą i należy teraz przeglądać wierzchołki z punktu B. Zapisujemy kolejne cechy tymczasowe; dla F: $4 + 6 = 10$, zaś dla E: $4 + 9 = 13$ (patrz: rys. 4).



[Tekst alternatywny. Graf nieskierowany z rys. 3, składający się z 7 wierzchołków i 11 krawędzi. Niebieskie litery oznaczają wierzchołki grafu, liczby obok krawędzi (odcinków) – wagi tych krawędzi, przekreślone bądź nieprzekreślone liczby w nawiasie obok wierzchołków – odpowiednio aktualne bądź nieaktualne cechy tymczasowe tych wierzchołków. Czerwone liczby obok poszczególnych wierzchołków – cechy stałe tych wierzchołków.]

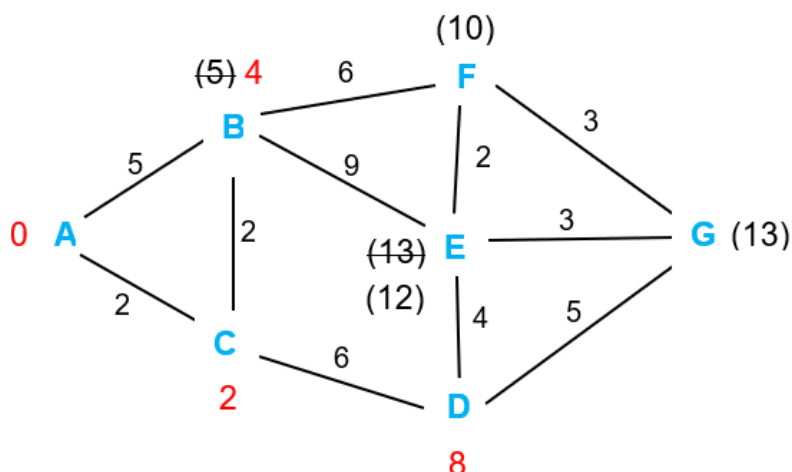


Rys. 4. Wyznaczanie najkrótszej ścieżki w grafie – krok 3.

Spośród trzech wierzchołków mających przypisane cechy tymczasowe, najmniejszą ma D i wynosi ona 8. Zamieniamy ją na stałą i analizujemy wierzchołki połączone bezpośrednio z D. Nadamy wierzchołkowi G cechę tymczasową $8 + 5 = 13$, zaś w wierzchołku E zostaje ona zaktualizowana, gdyż obecna $8 + 4 = 12$ jest mniejsza niż poprzednia, równa 13. Wynik obecnej iteracji przedstawia rys. 5.



[Tekst alternatywny. Graf nieskierowany z rys. 4, składający się z 7 wierzchołków i 11 krawędzi. Niebieskie litery oznaczają wierzchołki grafu, liczby obok krawędzi – wagi tych krawędzi, przekreślone bądź nieprzekreślone liczby w nawiasie obok wierzchołków – odpowiednio aktualne bądź nieaktualne cechy tymczasowe tych wierzchołków. Czerwone liczby obok poszczególnych wierzchołków – cechy stałe tych wierzchołków.]

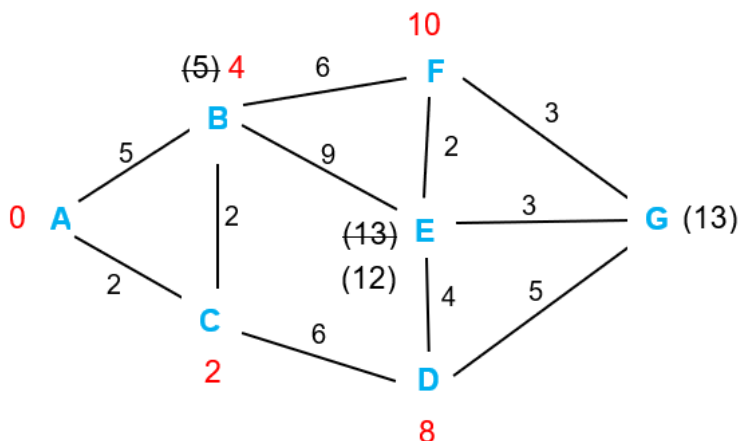


Rys.5. Wyznaczanie najkrótszej ścieżki w grafie – krok 4.

Po ostatniej aktualizacji najmniejszą cechą tymczasową równą 10 ma wierzchołek F. Staje się ona cechą stałą. Natomiast cechy wierzchołków E i G, wynoszące odpowiednio 12 i 13, nie zmieniają się, bo szukając najkrótszej drogi do E i G z punktu F, otrzymuje się odpowiednio $10 + 2 = 12$ i $10 + 3 = 13$ (patrz: rys. 6).



[Tekst alternatywny. Graf nieskierowany z rys. 5, składający się z 7 wierzchołków i 11 krawędzi. Niebieskie litery oznaczają wierzchołki grafu, liczby obok krawędzi – wagi tych krawędzi, przekreślone bądź nieprzekreślone liczby w nawiasie obok wierzchołków – odpowiednio aktualne bądź nieaktualne cechy tymczasowe tych wierzchołków. Czerwone liczby obok poszczególnych wierzchołków – cechy stałe tych wierzchołków.]

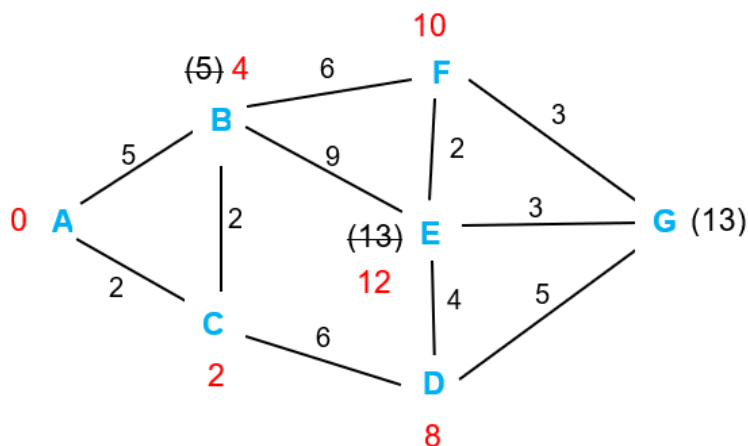


Rys.6. Wyznaczanie najkrótszej ścieżki w grafie – krok 5.

W grafie pozostały tylko dwa wierzchołki mające przypisaną cechę tymczasową, przy czym mniejszą ma wierzchołek E. Wynosi ona 12 i zostaje zamieniona na stałą. Wychodząc z punktu E i dochodząc do G znajdujemy drogę o długości $12 + 3 = 15$. Dotychczasowa cecha tymczasowa G jest mniejsza niż 15, więc cecha ta pozostanie nie zmieniona (patrz: rys. 7).



[Tekst alternatywny. Graf nieskierowany z rys. 6, składający się z 7 wierzchołków i 11 krawędzi. Niebieskie litery oznaczają wierzchołki grafu, liczby obok krawędzi (odcinków) – wagi tych krawędzi, przekreślone bądź nieprzekreślone liczby w nawiasie obok wierzchołków – odpowiednio aktualne bądź nieaktualne cechy tymczasowe tych wierzchołków. Czerwone liczby obok poszczególnych wierzchołków – cechy stałe tych wierzchołków.]



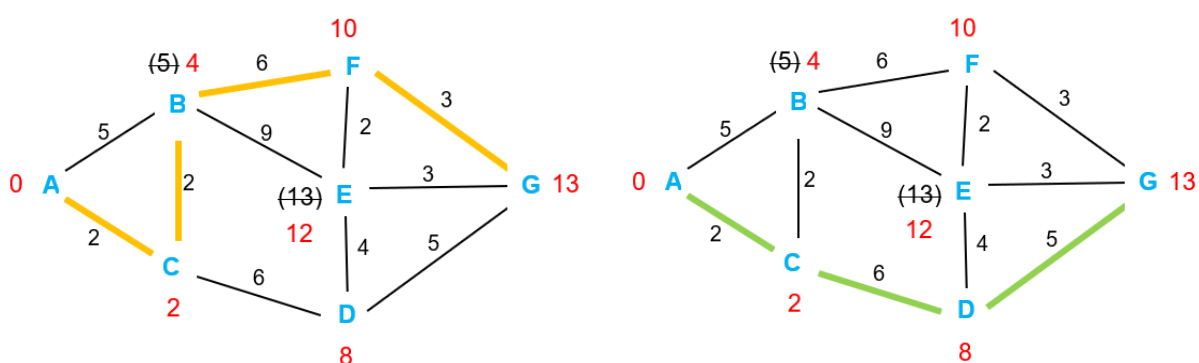
Rys.7. Wyznaczanie najkrótszej ścieżki w grafie – krok 6.

Jedyna w całym grafie cecha tymczasowa wynosi 13 i jest przypisana do wierzchołka końcowego G. Staje się ona cechą stałą i oznacza, że najkrótsza ścieżka od A do G ma długość równą 13. Pozostaje jeszcze wyznaczenie samej ścieżki, rozumianej jako sekwencja wierzchołków. Poruszając się wstecz, od punktu końcowego G do początkowego A, wybieramy te krawędzie (łuki), których waga jest taka sama jak różnica między cechami wierzchołków, jakie dana krawędź łączy. W rozpatrywanym problemie istnieją dwie takie ścieżki:

A – C – B – F – G oraz A – C – D – G (patrz: rys. 8).



[Tekst alternatywny. Graf nieskierowany z rys. 7, składający się z 7 wierzchołków i 11 krawędzi. Niebieskie litery oznaczają wierzchołki grafu, liczby obok krawędzi (odcinków) – wagi tych krawędzi, przekreślone bądź nieprzekreślone liczby w nawiasie obok wierzchołków – odpowiednio aktualne bądź nieaktualne cechy tymczasowe tych wierzchołków. Czerwone liczby obok poszczególnych wierzchołków – cechy stałe tych wierzchołków. Odcinki koloru żółtego w pierwszym grafie i zielonego w drugim grafie pokazują najkrótszą drogę.]

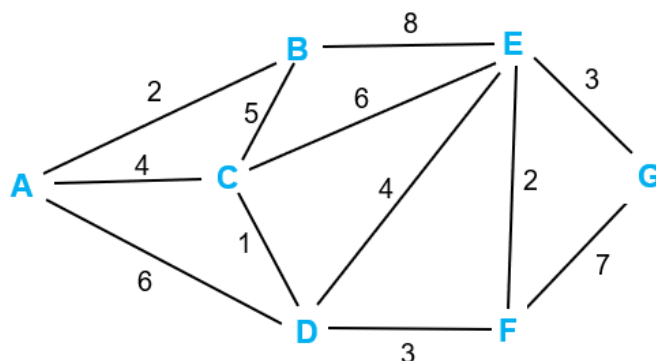


Rys.8. Rozwiązanie – dwie najkrótsze ścieżki w grafie.

6.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Wyznaczyć najkrótszą ścieżkę w danym grafie od wierzchołka A do wierzchołka G.

[Tekst alternatywny. Graf nieskierowany, składający się z 7 wierzchołków i 12 krawędzi. Niebieskie litery oznaczają wierzchołki. Liczby obok krawędzi (linii) oznaczają wagi tych krawędzi.]

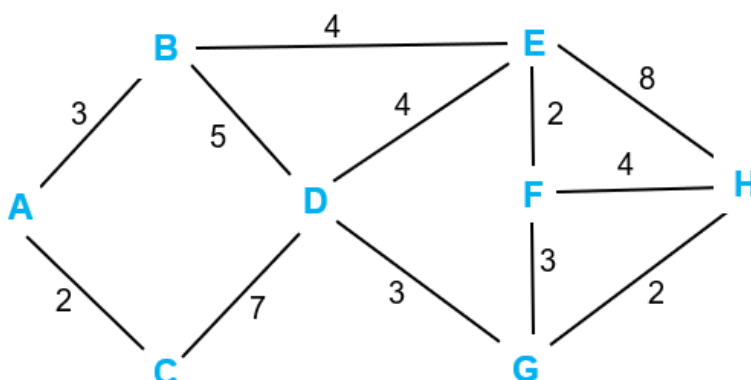


Rys.9. Graf ważony.



2. Wyznaczyć najkrótszą ścieżkę w danym grafie od wierzchołka A do wierzchołka H.

[Tekst alternatywny. Graf nieskierowany składający się z 8 wierzchołków i 12 krawędzi. Niebieskie litery oznaczają wierzchołki. Liczby obok krawędzi (linii) oznaczają wagi tych krawędzi.]



Rys.10. Graf ważony.

7. Analiza ścieżki krytycznej w sieci zależności

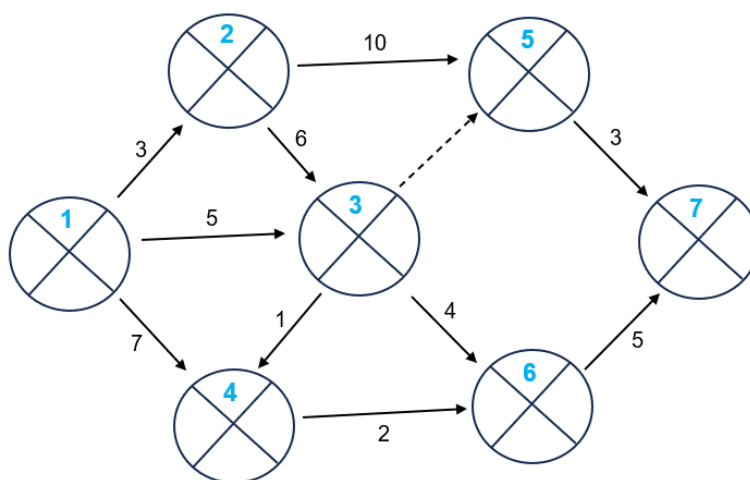
Będziemy analizować graf sieciowy obrazujący przedsięwzięcie rozumiane jako pewien układ zdarzeń i czynności. Przyjmujemy, że wagi krawędzi wyrażają czas trwania czynności. Krawędź narysowana przerywaną linią przedstawia czynność pozorną o zerowym czasie trwania. Wierzchołki grafu narysowane są w postaci koła podzielonego na cztery sektory. W górnym sektorze wpisuje się numer wierzchołka (zdarzenia), w lewym i prawym sektorze – odpowiednio najwcześniejszy i najpóźniejszy czas zajścia zdarzenia, w dolnym – rezerwę czasu. Szukany jest najkrótszy czas trwania całego przedsięwzięcia, z którym związana jest tzw. ścieżka krytyczna, odpowiadająca najdłuższej drodze w grafie od wierzchołka początkowego do końcowego.



7.1. Zadanie przykładowe

Rozpatrzmy sieć zależności przedstawioną na rys.11.

[Tekst alternatywny. Graf skierowany składający się z 7 kół i 11 krawędzi. Krawędzie w postaci strzałek, obok których liczby wyrażające wagi tych krawędzi. Wierzchołki w postaci kół podzielonych na cztery części. W górnej części kół liczby niebieskie liczby oznaczają numery poszczególnych wierzchołków.]



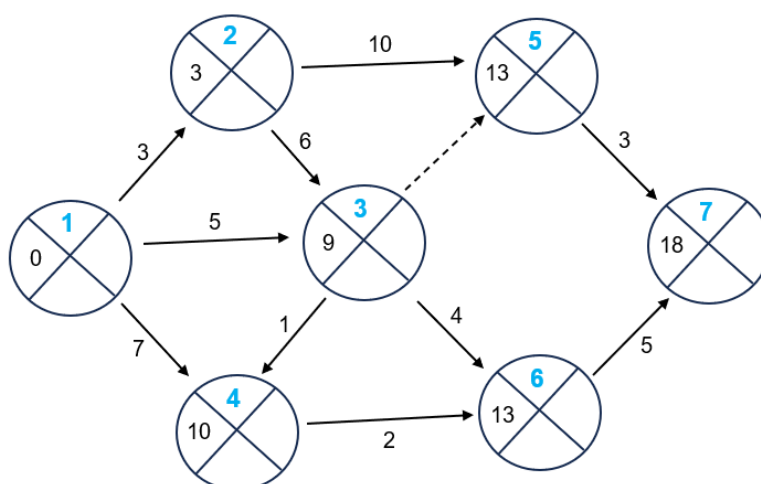
Rys.11. Struktura sieci zależności w grafie.

W pierwszym etapie dla zdarzenia 1 wpisujemy 0 jako najwcześniejszy czas zajścia tego zdarzenia, a dalej obliczamy najwcześniejsze czasy zajścia wszystkich pozostałych zdarzeń jako „czas z poprzedniego zdarzenia plus waga krawędzi” i wpisujemy je w lewych sektorach kół. Dla zdarzenia 2 dostajemy $0 + 3 = 3$. Dla zdarzenia 3 będzie to większa z sum $3 + 6$ i $0 + 5$, czyli 9. Rozpatrywaliśmy tu dwie sumy, bo jak widać na rysunku, do wierzchołka 3 można dojść na dwa sposoby: od wierzchołka 1 bądź od 2. Jako wynik bierzemy większą z tych dwóch sum, bo poszukuje się drogi najdłuższej.

Na podobnej zasadzie do wierzchołka 4 można dojść z wierzchołków 1 i 3, do 5 – z wierzchołków 2 i 3, do 6 – z wierzchołków 3 i 4, a do 7 – z wierzchołków 5 i 6. W każdym z wymienionych przypadków, najwcześniejszy czas zajścia odpowiedniego zdarzenia jest większą z odpowiednich sum. Dla zdarzenia numer 4 są to sumy $0 + 5$ i $9 + 1$, dla 5 – sumy $3 + 10$ i $9 + 0$, dla 6 – sumy $9 + 4$ i $10 + 2$, dla 7 – sumy $13 + 3$ i $13 + 5$. Po tych obliczeniach możemy narysować sieć z wpisanymi najwcześniejszymi czasami zajścia poszczególnych zdarzeń:



[Tekst alternatywny. Graf skierowany z rys. 11. Krawędzie w postaci strzałek, obok których liczby wyrażające wagi tych krawędzi. Wierzchołki w postaci kół podzielonych na cztery części. W górnej części kół liczby niebieskie liczby oznaczają numery poszczególnych wierzchołków. Liczby w lewych sektorach kół oznaczają najwcześniejsze czasy zajścia poszczególnych zdarzeń.]



Rys.12. Analiza sieci zależności w grafie – etap pierwszy.

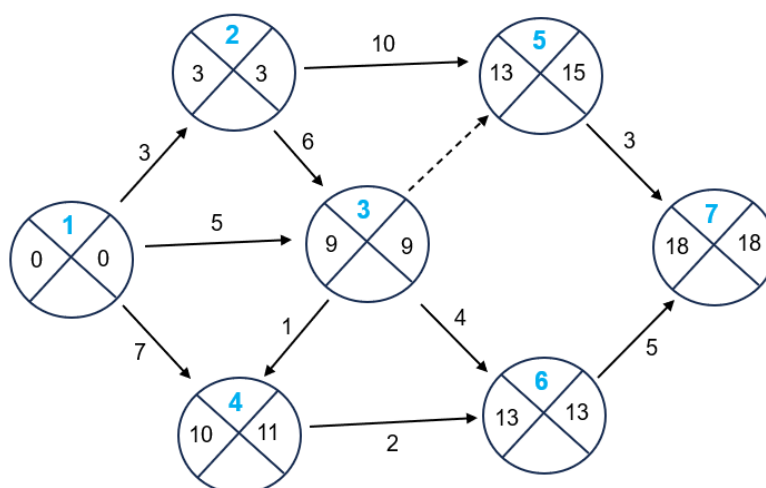
Liczba 18 w lewym sektorze ostatniego wierzchołka oznacza, że czas trwania całego przedsięwzięcia to co najmniej 18 jednostek czasu. Przyjmujemy zatem 18 jako najpóźniejszy czas zajścia zdarzenia końcowego (czyli zdarzenia 7) i umieszczamy 18 w prawym sektorze koła. Metodą kroku wstecz będziemy wyznaczać najpóźniejsze czasy zajścia wszystkich pozostałych zdarzeń, wpisując stosowne liczby w prawych sektorach poszczególnych kół. Procedura będzie dość podobna do tej z poprzedniego etapu, z tym że będziemy brać pod uwagę różnice a nie sumy. Dla kolejnych zdarzeń przeprowadzamy obliczenie stosownego czasu wykonując odejmowanie „czas następnego zdarzenia minus waga krawędzi”. Dla zdarzenia 6 bezpośrednio następnym jest zdarzenie 7, więc w prawym sektorze wierzchołka 6 wpisujemy różnicę $18 - 5 = 13$. Podobnie, dla zdarzenia 5 mamy różnicę $18 - 3 = 15$ i dla zdarzenia 4 różnicę $13 - 2 = 11$. Przechodząc przez dany graf „pod prąd” zauważamy, że do wierzchołka 3 dochodzi się bezpośrednio z wierzchołków 4, 5 i 6, do 2 – z wierzchołków 3 i 5, a do 1 – z wierzchołków 2, 3 i 4. Stąd najpóźniejsze czasy wynoszą:

- dla zdarzenia 3: najmniejsza z różnic $11 - 1$, $15 - 0$ i $13 - 4$, czyli 9;
- dla zdarzenia 2: mniejsza z różnic $9 - 6$ i $15 - 10$, czyli 3;
- dla zdarzenia 1: najmniejsza z różnic $3 - 3$, $9 - 5$ i $11 - 7$, czyli 0.



Możemy teraz uzupełnić graf o uzyskane na tym etapie wyniki.

[Tekst alternatywny. Graf skierowany z rys. 12. Krawędzie w postaci strzałek, obok których liczby wyrażające wagi tych krawędzi. Wierzchołki w postaci kół podzielonych na cztery części. W górnej części kół liczby niebieskie liczby oznaczają numery poszczególnych wierzchołków. Liczby w lewych oraz prawych sektorach kół oznaczają odpowiednio najwcześniejsze i najpóźniejsze czasy zajścia poszczególnych zdarzeń.]

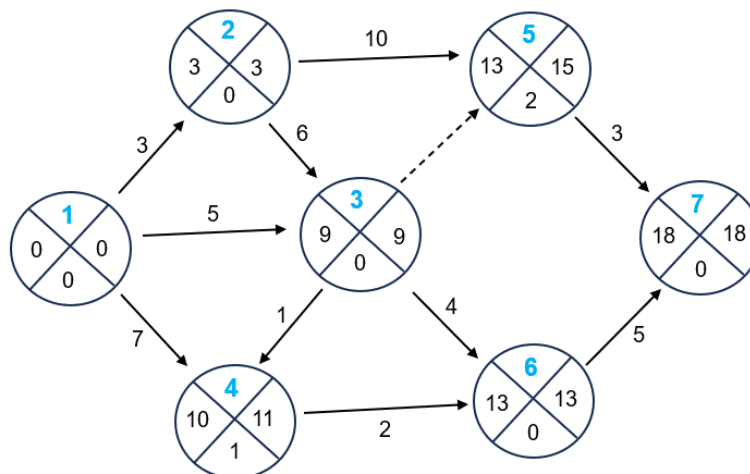


Rys.13. Analiza sieci zależności w grafie – etap drugi.

W kolejnym kroku obliczamy różnicę między najpóźniejszym i najwcześniejszym czasem zajścia każdego zdarzenia, czyli tzw. rezerwę czasu i wpisujemy ją w dolnym sektorze danego koła.



[Tekst alternatywny. Graf skierowany z rys. 13. Krawędzie w postaci strzałek, obok których liczby wyrażające wagi tych krawędzi. Wierzchołki w postaci kół podzielonych na cztery części. W górnej części kół liczby niebieskie liczby oznaczają numery poszczególnych wierzchołków. Liczby w lewych oraz prawych sektorach kół oznaczają odpowiednio najwcześniejsze i najpóźniejsze czasy zajścia poszczególnych zdarzeń. Liczby w dolnych sektorach kół oznaczają rezerwy czasu.]

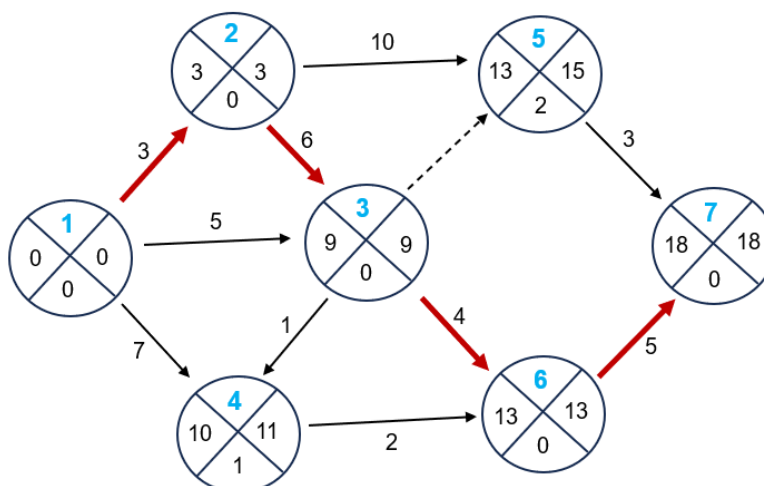


Rys.14. Analiza sieci zależności w grafie – etap trzeci.

Na koniec zaznaczamy w danej sieci ścieżkę krytyczną, prowadzącą od pierwszego do ostatniego zdarzenia poprzez wszystkie zdarzenia o zerowej rezerwie czasu. Jest to ścieżka 1-2-3-6-7 (patrz: rys.15).



[Tekst alternatywny. Graf skierowany z rys. 14. Krawędzie w postaci strzałek, obok których liczby wyrażające wagi tych krawędzi. Wierzchołki w postaci kół podzielonych na cztery części. W górnej części kół liczby niebieskie liczby oznaczają numery poszczególnych wierzchołków. Liczby w lewych oraz prawych sektorach kół oznaczają odpowiednio najwcześniejsze i najpóźniejsze czasy zajścia poszczególnych zdarzeń. Liczby w dolnych sektorach kół oznaczają rezerwy czasu. Czerwone strzałki wyznaczają ścieżkę krytyczną.]



Rys.15. Analiza sieci zależności w grafie – etap czwarty: wyznaczenie ścieżki krytycznej.

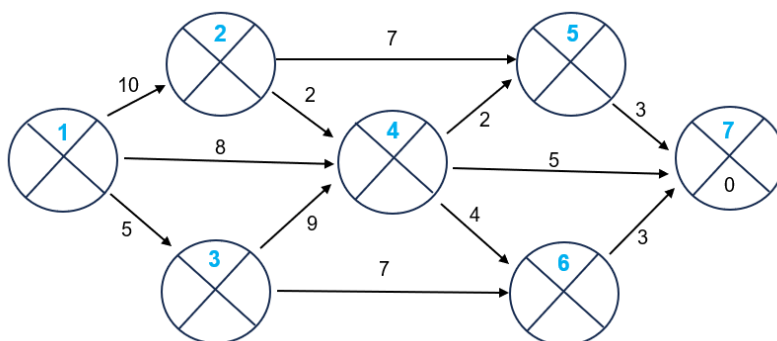


7.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Wyznaczyć ścieżkę krytyczną w podanej sieci zależności i podać interpretację wyniku.

1.

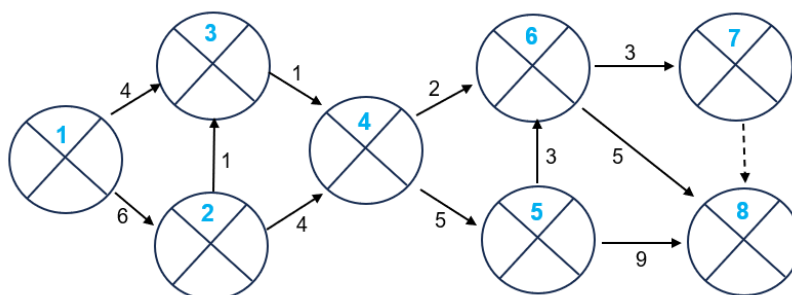
[Tekst alternatywny. Graf skierowany składający się z 7 kół i 12 krawędzi. Krawędzie w postaci strzałek, obok których liczby wyrażające wagi tych krawędzi. Wierzchołki w postaci kół podzielonych na cztery części. W górnej części kół liczby niebieskie liczby oznaczają numery poszczególnych wierzchołków.]



Rys.16. Sieć zależności.

2.

[Tekst alternatywny. Graf skierowany składający się z 8 kół i 12 krawędzi. Krawędzie w postaci strzałek, obok których liczby wyrażające wagi tych krawędzi. Wierzchołki w postaci kół podzielonych na cztery części. W górnej części kół liczby niebieskie liczby oznaczają numery poszczególnych wierzchołków.]



Rys.17. Sieć zależności.



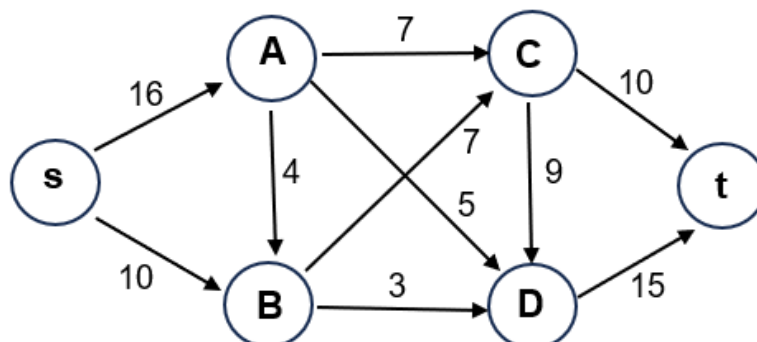
8. Maksymalny przepływ w sieci transportowej

Będziemy rozpatrywali pewne szczególne grafy skierowane zwane sieciami przepływowymi. Przypomnijmy, że taka sieć zawiera dwa wyróżnione wierzchołki zwane odpowiednio źródłem i ujściem; jej krawędzie określa się mianem kanałów, a nieujemne wagi tych krawędzi interpretowane są jako przepustowości. W danej sieci przepływowej będziemy poszukiwali maksymalnego przepływu.

8.1. Zadanie przykładowe

Wyznamy maksymalny przepływ w sieci przedstawionej na rys. 18.

[Tekst alternatywny. Graf skierowany składający się z 6 kół i 10 krawędzi. Wierzchołki w postaci kół, wewnątrz których są litery na oznaczenie poszczególnych wierzchołków. Krawędzie grafu w postaci strzałek, obok których liczby wyrażające wagi tych krawędzi.]



Rys.18. Sieć przepływowa.

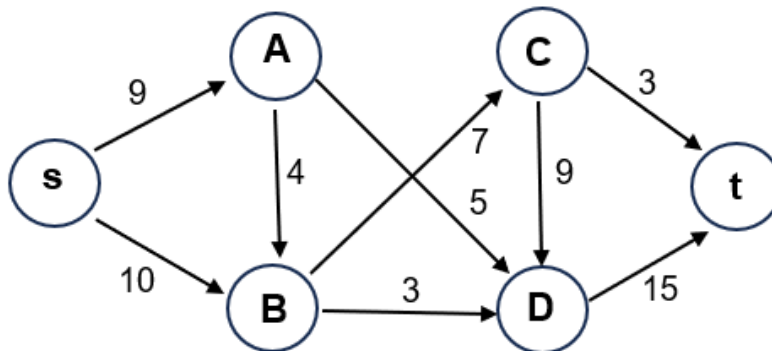
Na wstępie zauważmy, że suma przepustowości kanałów wychodzących ze źródła wynosi $16 + 10 = 26$, zaś wchodzących do ujścia wynosi $10 + 15 = 25$. Maksymalny przepływ nie może przekroczyć mniejszej z tych liczb, czyli 25.

W pierwszym kroku procedury wyznaczania maksymalnego przepływu wyzerujemy wartość przepływu i wybieramy tzw. ścieżkę powiększającą, prowadzącą od źródła s do ujścia t , przy czym preferowane są ścieżki o możliwie najmniejszej liczbie krawędzi. Pierwszym wyborem będzie np. ścieżka $s - A - C - t$. Najmniejszą przepustowość na tej ścieżce ma kanał $A - C$ i wynosi ona 7. Zatem możemy na tej ścieżce zwiększyć przepływ o 7 jednostek. Przepustowości kanałów



$s - A$ i $C - t$ zmniejszamy o 7, a kanał $A - C$ którym po zmniejszeniu o 7 nie można już przesłać żadnej dodatkowej jednostki przepływu, usuwamy z grafu. Przyjmujemy jako zasadę, że kanał o zerowej przepustowości (tzw. nasycony) będzie usuwany z grafu. Tak zaktualizowaną sieć, zwaną siecią rezydualną, przedstawia rys. 19.

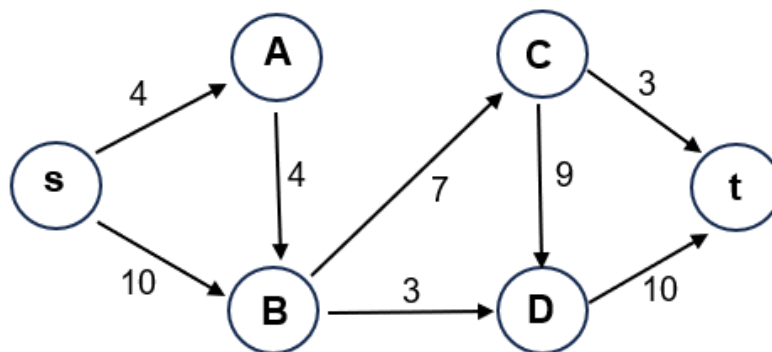
[Tekst alternatywny. Graf skierowany z rys. 18 po aktualizacji. Wierzchołki w postaci kół, wewnątrz których litery na oznaczenie poszczególnych wierzchołków. Krawędzie grafu w postaci strzałek, obok których liczby wyrażające wagi tych krawędzi.]



Rys.19. Sieć rezydualna po pierwszej iteracji algorytmu.

W następnym kroku znowu dokonujemy wyboru ścieżki powiększającej (według wcześniej wspomnianej zasady). Niech to będzie ścieżka $s - A - D - t$, której kolejne kanały mają przepustowości odpowiednio 9, 5 i 15. Najmniejsza z nich to 5, więc o 5 zwiększamy przepływ i aktualizujemy sieć, w której nie będzie już kanału nasyconego $A - D$.

[Tekst alternatywny. Graf skierowany z rys. 19 po aktualizacji. Wierzchołki w postaci kół, wewnątrz których litery na oznaczenie poszczególnych wierzchołków. Krawędzie grafu w postaci strzałek, obok których liczby wyrażające wagi tych krawędzi.]

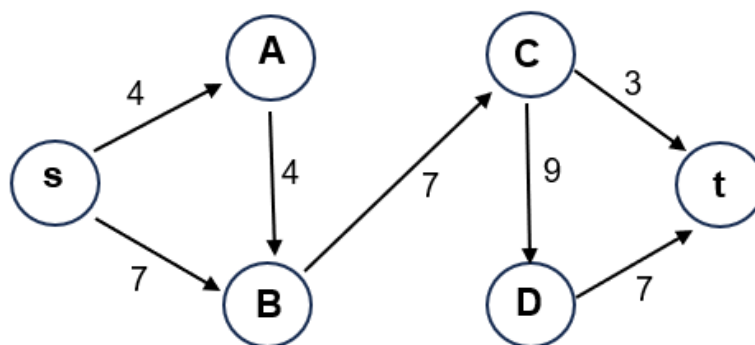


Rys.20. Sieć rezydualna po drugiej iteracji algorytmu.



Znowu dokonujemy wyboru ścieżki powiększającej, np. biorąc $s - B - D - t$, gdzie najmniejsza przepustowość to 3 i o tę wartość zwiększamy przepływ. Otrzymana sieć rezydualna pozbawiona jest krawędzi $B - D$.

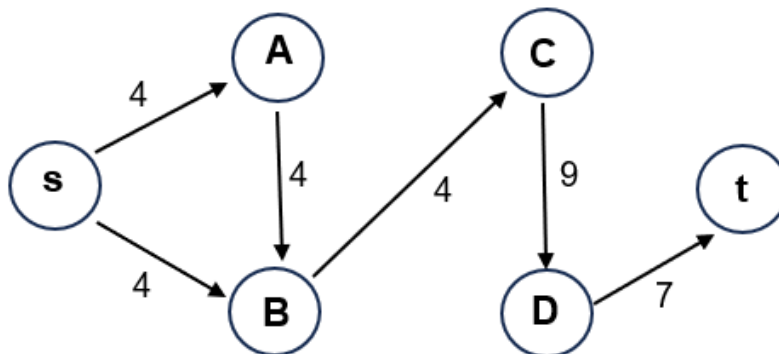
[Tekst alternatywny. Graf skierowany z rys. 20 po aktualizacji. Wierzchołki w postaci kół, wewnątrz których litery na oznaczenie poszczególnych wierzchołków. Krawędzie grafu w postaci strzałek, obok których liczby wyrażające wagi tych krawędzi.]



Rys.21. Sieć rezydualna po trzeciej iteracji algorytmu.

Na aktualnym etapie istnieją tylko cztery ścieżki powiększające, wybieramy tę najkrótszą, czyli $s - B - C - t$, na której zwiększamy przepływ o 3 (o przepustowość kanału $C - t$). Po zaktualizowaniu przepustowości i usunięciu nasyconego kanału $C - t$, otrzymujemy sieć rezydualną, którą przedstawia rys. 22.

[Tekst alternatywny. Graf skierowany z rys. 21 po aktualizacji. Wierzchołki w postaci kół, wewnątrz których litery na oznaczenie poszczególnych wierzchołków. Krawędzie grafu w postaci strzałek, obok których liczby wyrażające wagi tych krawędzi.]

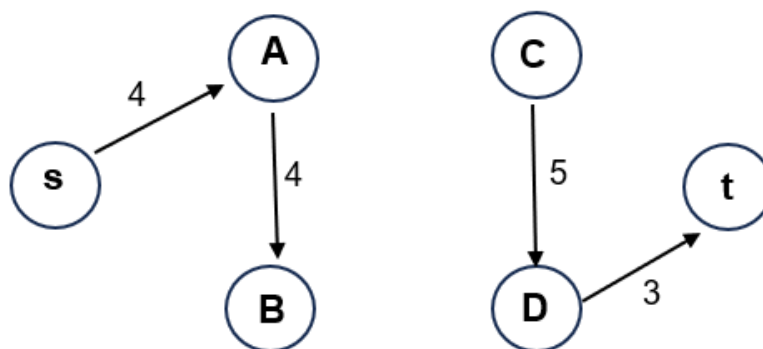


Rys.22. Sieć rezydualna po czwartej iteracji algorytmu.



Rys. 22. pokazuje, że w sieci pozostały już tylko dwie ścieżki powiększające, z których wybierzemy $s - B - C - D - t$ i zwiększymy na niej przepływ o maksymalną wartość, czyli o 4. Aktualizujemy przepustowości kanałów $C - D$ i $D - t$, zmniejszając je o 4, zaś $s - B$ i $B - C$ po maksymalnym wykorzystaniu ich możliwości zostają usunięte i w efekcie sieć rezydualną obrazuje graf niespójny.

[Tekst alternatywny. Graf skierowany z rys. 22 po aktualizacji. Wierzchołki w postaci kół, wewnątrz których litery na oznaczenie poszczególnych wierzchołków. Krawędzie grafu w postaci strzałek, obok których liczby wyrażające wagi tych krawędzi.]



Rys.23. Sieć rezydualna po piątej iteracji algorytmu.

W otrzymanej sieci nie ma już ścieżek powiększających. Sumujemy teraz liczby, o które zwiększaliśmy w kolejnych krokach przepływy: $7 + 5 + 3 + 3 + 4 = 22$. Zatem maksymalny przepływ ma wartość 22.

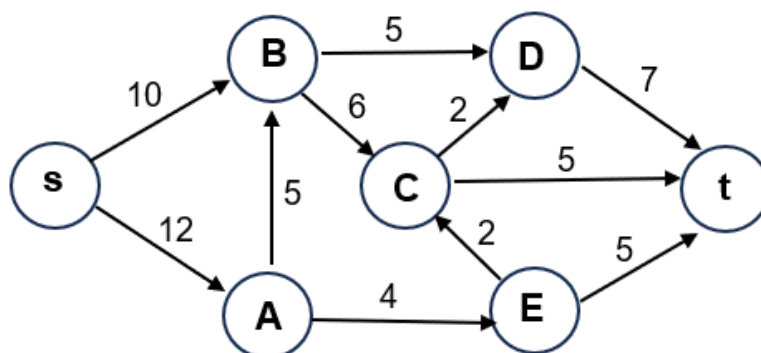


8.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Wyznaczyć maksymalny przepływ w podanej sieci przepływowej.

1.

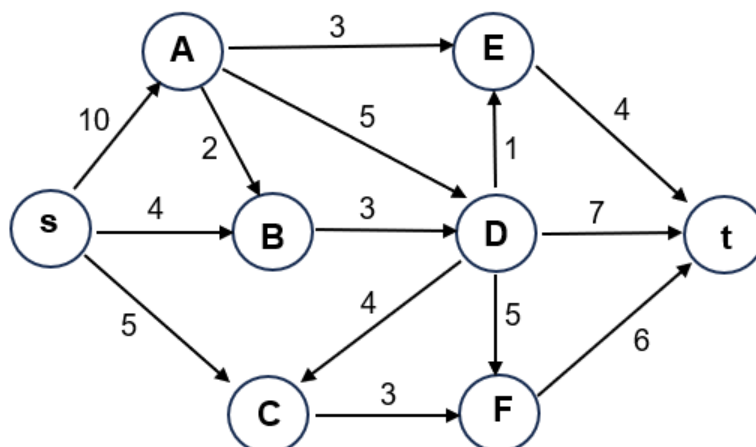
[Tekst alternatywny. Graf skierowany składający się z 7 kół i 11 krawędzi. Wierzchołki w postaci kół, wewnątrz których litery na oznaczenie poszczególnych wierzchołków. Krawędzie grafu w postaci strzałek, obok których liczby wyrażające wagi tych krawędzi.]



Rys.24. Sieć przepływowa.

2.

[Tekst alternatywny. Graf skierowany składający się z 8 kół i 14 krawędzi. Wierzchołki w postaci kół, wewnątrz których litery na oznaczenie poszczególnych wierzchołków. Krawędzie grafu w postaci strzałek, obok których liczby wyrażające wagi tych krawędzi.]



Rys.25. Sieć przepływowa.



9. Odpowiedzi do zadań

9.1. Odpowiedzi do rozdziału 2

1. Matryca logiczna:

| p | q | r | $\sim q$ | $p \wedge r$ | $p \wedge r \Rightarrow \sim q$ | $q \vee (p \wedge r \Rightarrow \sim q)$ |
|-----|-----|-----|----------|--------------|---------------------------------|--|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Wniosek: Formuła $q \vee (p \wedge r \Rightarrow \sim q)$ jest tautologią.

2. Matryca logiczna:

| p | q | r | $p \vee r$ | $q \Rightarrow p$ | $(p \vee r) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$ |
|-----|-----|-----|------------|-------------------|--|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

Wniosek: Formuła $(p \vee r) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$ nie jest tautologią.



9.2. Odpowiedzi do rozdziału 3

1. Relacja zwrotna, antysymetryczna, przechodnia.
2. Relacja przeciwzwrotna, przeciwsymetryczna, przechodnia, spójna.

9.3. Odpowiedzi do rozdziału 4

1. $u_n = 2 \cdot (-3)^n + 3$.
2. $u_n = (4n - 3) \cdot 6^n$.

9.4. Odpowiedzi do rozdziału 5

1. Sprawdzamy najpierw, że

1° dla $n = 1$ lewa strona wzoru wynosi $1^3 = 1$, zaś prawa $1^2 \cdot \frac{2^2}{4} = 1$, czyli wzór jest prawdziwy.

Musimy teraz wykazać, że

2° dla dowolnej liczby naturalnej $k \geq 1$ prawdziwa jest implikacja

$$1^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} \Rightarrow 1^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \quad (24)$$

Rozpisujemy sumę $1^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3$, korzystając z założenia indukcyjnego:

$$1^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3, \quad (25)$$

a następnie wyrazy po prawej stronie (25) sprowadzamy do wspólnego mianownika

$$\frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} \quad (26)$$



Po wyłączeniu $(k + 1)^2$ przed nawias otrzymuje się

$$\frac{(k + 1)^2(k^2 + 4(k + 1))}{4} = \frac{(k + 1)^2(k + 2)^2}{4} \quad (27)$$

i tym samym implikacja (24) została wykazana. Skoro tak, zasada indukcji matematycznej gwarantuje, że rozpatrywany wzór jest prawdziwy dla wszystkich n naturalnych począwszy od 1.

2. Zauważamy najpierw, że

1° dla $n = 0$ twierdzenie jest prawdziwe, bo dana liczba to $13^0 - 7 = -6$, więc jest ona podzielna przez 6.

Teraz należy pokazać dla dowolnego $k \geq 0$ prawdziwość implikacji

$$6|13^k - 7 \Rightarrow 6|13^{k+1} - 7 \quad (28)$$

Korzystając z własności potęg, możemy napisać

$$13^{k+1} - 7 = 13 \cdot 13^k - 7 = (12 + 1) \cdot 13^k - 7 = 12 \cdot 13^k + 13^k - 7 \quad (29)$$

Otrzymana liczba $12 \cdot 13^k + 13^k - 7$ jest podzielna przez 6, bo pierwszy składnik jest wielokrotnością 12, a drugi składnik, czyli $13^k - 7$ jest podzielny przez 6 na mocy założenia indukcyjnego. Tym samym wykazaliśmy, korzystając z zasady indukcji matematycznej, że rozpatrywane twierdzenie jest prawdziwe.

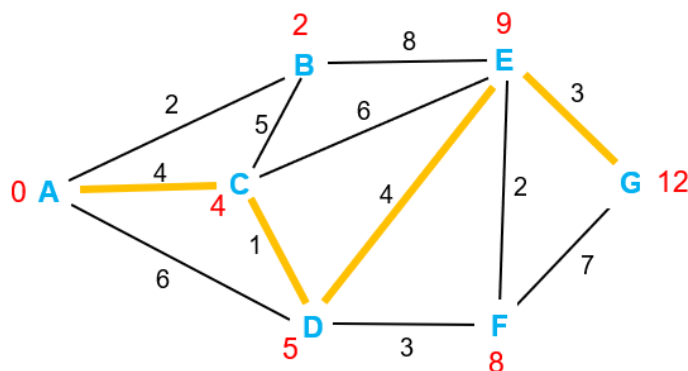




9.5. Odpowiedzi do rozdziału 6

1. Najkrótsza ścieżka A – C – D – E – G (na rys. 26); ma długość 12.

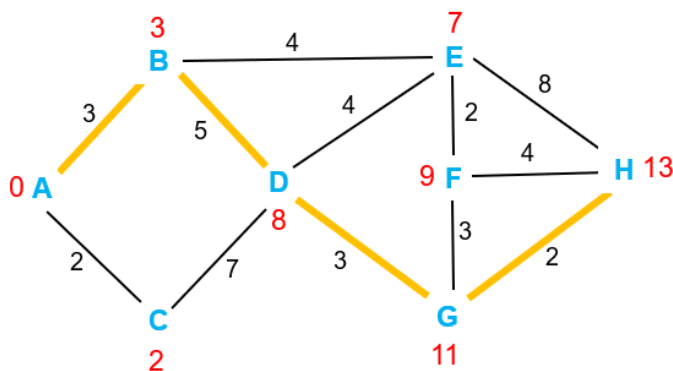
[Tekst alternatywny. Graf nieskierowany składający się z 7 wierzchołków i 12 krawędzi. Niebieskie litery oznaczają wierzchołki grafu, liczby obok odcinków (krawędzi) - wagi tych krawędzi, czerwone liczby obok poszczególnych wierzchołków – cechy stałe tych wierzchołków. Odcinki koloru żółtego to krawędzie wyznaczające najkrótszą drogę.]



Rys.26. Najkrótsza ścieżka w grafie.

2. Zadanie ma dwa rozwiązania. Najkrótsze ścieżki A – B – D – G – H i A – B – E – F – H (na rys. 27 i rys. 28); mają długość 13.

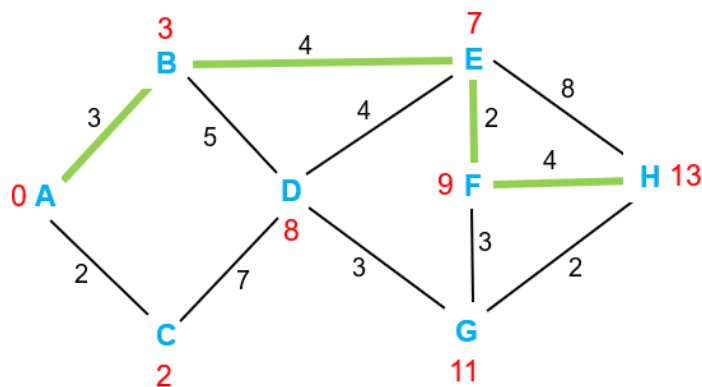
[Tekst alternatywny. Graf nieskierowany składający się z 8 wierzchołków i 12 krawędzi. Niebieskie litery oznaczają wierzchołki grafu, liczby obok odcinków (krawędzi) - wagi tych krawędzi, czerwone liczby obok poszczególnych wierzchołków – cechy stałe tych wierzchołków. Odcinki koloru żółtego to krawędzie wyznaczające najkrótszą drogę.]



Rys.27. Najkrótsza ścieżka w grafie – pierwsze rozwiązanie.



[Tekst alternatywny. Graf nieskierowany składający się z 8 wierzchołków i 12 krawędzi. Niebieskie litery oznaczają wierzchołki grafu, liczby obok odcinków (krawędzi) - wagi tych krawędzi, czerwone liczby obok poszczególnych wierzchołków – cechy stałe tych wierzchołków. Odcinki koloru zielonego to krawędzie wyznaczające najkrótszą drogę.]

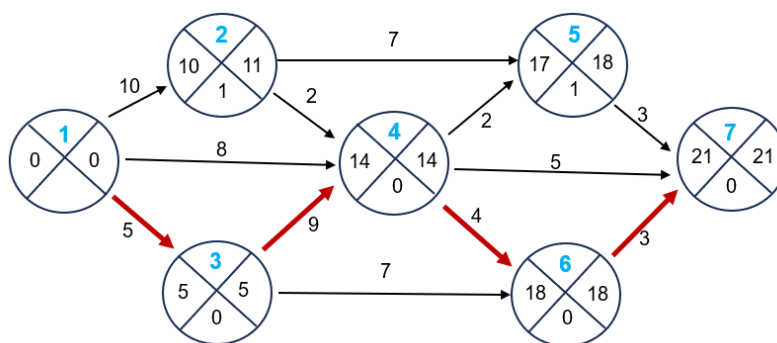


Rys.28. Najkrótsza ścieżka w grafie – drugie rozwiązanie.

9.6. Odpowiedzi do rozdziału 7

1. Ścieżka krytyczna 1 – 3 – 4 – 6 – 7.

[Tekst alternatywny. Graf skierowany składający się z 7 kół i 12 krawędzi. Krawędzie w postaci strzałek, obok których liczby wyrażające wagi krawędzi. Wierzchołki w postaci kół podzielonych na cztery części. W górnej części kół liczby napisane kolorem niebieskim oznaczają numer wierzchołka. Liczby w lewych oraz prawych sektorach kół oznaczają odpowiednio najwcześniejszy i najpóźniejszy czas zajścia zdarzenia. Liczby w dolnych sektorach kół oznaczają rezerwy czasu. Czerwone strzałki wyznaczają ścieżkę krytyczną.]



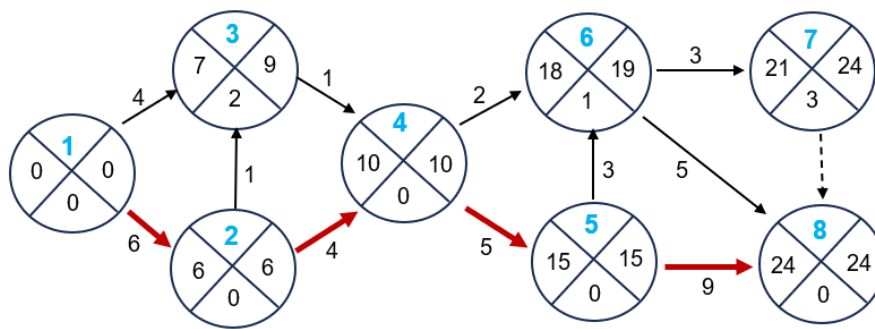
Rys.29. Ścieżka krytyczna w sieci zależności.



Interpretacja: Najkrótszy czas trwania przedsięwzięcia to 21 jednostek czasu.

2. Ścieżka krytyczna 1 – 2 – 4 – 5 – 8.

[Tekst alternatywny. Graf skierowany. Krawędzie w postaci strzałek, obok których liczby wyrażające wagi krawędzi. Wierzchołki w postaci kół podzielonych na cztery części. W górnej części kół liczby napisane kolorem niebieskim oznaczają numer wierzchołka. Liczby w lewych oraz prawych sektorach kół oznaczają odpowiednio najwcześniejszy i najpóźniejszy czas zajścia zdarzenia. Liczby w dolnych sektorach kół oznaczają rezerwy czasu. Czerwone strzałki wyznaczają ścieżkę krytyczną.]



Rys.30. Ścieżka krytyczna w sieci zależności.

Interpretacja: Najkrótszy czas trwania przedsięwzięcia to 24 jednostki czasu.

9.7. Odpowiedzi do rozdziału 8

1. Maksymalny przepływ o wartości 15.
2. Maksymalny przepływ o wartości 14.



10. Literatura

Dla lepszego opanowania wiadomości w ramach kursu matematyki dyskretnej zaleca się, aby student sięgnął do dostępnych źródeł drukowanych. Rekomendowana literatura obejmuje następujące pozycje książkowe:

1. Giordano F.R., Fox W.P., Horton S.B., Weir M.D. (2009), *A First Course in Mathematical Modeling*, Brooks Cole.
2. Rasiowa H. (2013), *Wstęp do matematyki współczesnej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
3. Ross K.A., Wright C.R.B. (2023), *Matematyka dyskretna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
4. Włoch A., Włoch I. (2017), *Matematyka dyskretna. Podstawowe metody i algorytmy teorii grafów*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów.