



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



Politechnika Świętokrzyska
Wydział Mechatroniki i Budowy Maszyn

Kierunek studiów:
Automatyka i Robotyka

Leszek Cedro

Materiały dydaktyczne do przedmiotu

Modelowanie obiektów automatyki

opracowane w ramach realizacji Projektu
**„Dostosowanie kształcenia
w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb
współczesnej gospodarki”**
FERS.01.05-IP.08-0234/23

Kielce, 2025



Politechnika Świętokrzyska
Kielce University of Technology

*Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki”
nr FERS.01.05-IP.08-0234/23*



Spis treści

1. Modele matematyczne obiektów sterowania	3
2. Podstawy teoretyczne sterowania procesami.....	5
3. Teoria układów dynamicznych	6
4. Przykłady zastosowań modelowania	9
4.1. Manipulator płaski o dwóch stopniach swobody.....	10
4.2. Model podwójnego wirnika - Twin Rotor.....	17
5. Literatura	30



Utwór objęty licencją Creative Commons BY 4.0.

Licencja dostępna pod adresem: <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



1. Modele matematyczne obiektów sterowania

Teoria układów dynamicznych bada właściwości układów fizycznych, analizując ich zmienność w czasie pod wpływem oddziaływań zewnętrznych i wewnętrznych. Zastosowanie tej teorii w sterowaniu procesami umożliwia wykorzystanie jednolitych metod analizy różnych układów.

Układ to zbiór elementów powiązanych oddziaływaniem. Sterowanie procesem polega na wpływaniu na jego przebieg w celu realizacji określonego zadania. Proces to zespół zjawisk powiązanych przyczynowo, a obiekt sterowania to proces podlegający kontroli.

Wybór metody sterowania zależy od kryterium jakości sterowania, które ocenia, jak dobrze proces realizuje założone cele. Optymalizacja sterowania polega na znalezieniu rozwiązania, które maksymalizuje ten wskaźnik jakości.

Urządzenie sterujące to system, który wpływa na przebieg procesu, uwzględniając ograniczenia techniczne i energetyczne. Oddziaływania na proces dzielimy na sterujące, które możemy kontrolować, oraz zakłócające, na które nie mamy wpływu. Przebieg procesu opisują wielkości wyjściowe, które są mierzalne w czasie. Elementy procesu mogą magazynować energię i masę, a zmiany stanu procesu zależą od oddziaływań zewnętrznych i stanu początkowego. Wartości sterujące dobiera się na podstawie analizy procesu, a w sterowaniu automatycznym wymagane jest zestawienie informacji w formie umożliwiającej ich przetwarzanie przez urządzenia.

W praktyce, sterowanie optymalne wymaga dodatkowych informacji o procesie, aby osiągnąć najlepszy wynik zgodnie z określonym kryterium jakości. Może to obejmować skład produktu, koszty surowców i energii.

Modelowanie procesów sterowanych opiera się na matematycznych reprezentacjach, które upraszczają rzeczywiste układy fizyczne w celu analizy i sterowania. Modele te pomagają w symulacjach i testowaniu hipotez, ale zawsze pozostają uproszczoną wersją rzeczywistości. Zgodnie z przyjętą strukturą sterowania, niezbędne jest posiadanie odpowiedniego zbioru informacji o procesie, które muszą być zestawione w sposób spełniający wymagania współpracy z urządzeniami składającymi się na układ sterowania. Celem jest, by reprezentacja procesu była zbiorem zależności matematycznych, czyli stworzenie modelu matematycznego procesu.

Modele układów fizycznych są szeroko wykorzystywane zarówno w celach poznawczych, jak i w praktyce. Korzystanie z modeli zamiast rzeczywistych układów fizycznych pozwala na łatwiejszą analizę zjawisk, weryfikowanie hipotez, testowanie projektów urządzeń i inne. Model układu fizycznego to uproszczona reprezentacja



układu, dostosowana do określonego celu, uwzględniająca założenia ograniczające i upraszczające. Założenia te obejmują m.in. zakres zmian wielkości w modelowanym układzie oraz wskazania na cechy, które można pominąć w danym etapie badawczym, zależnie od celu.

W kontekście modeli rozróżnia się modele matematyczne (teoretyczne) oraz modele fizyczne (eksperymentalne). Model matematyczny to uproszczony obraz układu fizycznego wyrażony matematycznie, który koncentruje się na najistotniejszych cechach układu. Model fizyczny to prostszy układ fizyczny, który w określonych warunkach może reprezentować właściwości układu rzeczywistego. Współczesna technika obliczeniowa i symulacyjna sprawia, że granica między modelami matematycznymi a fizycznymi staje się płynna. Matematyczna reprezentacja układu fizycznego jest symulowana w systemie cyfrowym lub analogowym, co utrudnia określenie, czy mamy do czynienia z modelem matematycznym, czy fizycznym.

W sterowaniu procesami kluczową rolę odgrywają modele matematyczne, zarówno procesów sterowanych, jak i urządzeń używanych do sterowania. Model matematyczny procesu nie jest pełnym odwzorowaniem rzeczywistego układu fizycznego, ale powinien reprezentować tylko te cechy układu, które są istotne z perspektywy sterowania. Model, który zawiera zbyt wiele szczegółów, staje się skomplikowany, co utrudnia jego zastosowanie.

Zbyt mała ilość danych uwzględnionych w modelu może prowadzić do znacznych różnic między właściwościami układu rzeczywistego a właściwościami modelu, co utrudnia skuteczne sterowanie procesem. W najbardziej ogólnym ujęciu, model matematyczny procesu sterowanego powinien reprezentować układ fizyczny w sposób umożliwiający sterowanie jego właściwościami poprzez określone wielkości fizyczne. Z tego względu, zmienne fizyczne, które charakteryzują proces, są przyporządkowywane odpowiednim funkcjom czasu. Często te zmienne przedstawiane są w postaci wektorowej, nazywając je zmiennymi lub sygnałami.

Model matematyczny procesu stanowi zbiór zależności matematycznych, które łączą zmienne opisujące proces i odzwierciedlają zjawiska fizyczne w nim zachodzące. W modelu występują także parametry, które mogą być stałe w danym przedziale czasu, oraz zmienne, które charakteryzują model i są określane w danych przedziałach zmian zmiennych wejściowych i wyjściowych procesu, uwzględniając jego zmienność w czasie pod wpływem oddziaływań zewnętrznych i wewnętrznych. Ujęcie dynamiki układu fizycznego w modelu matematycznym, czyli uwzględnienie jego zmienności w czasie, jest istotne przy tworzeniu modelu dynamicznego. Rodzaj zastosowania modelu obiektu sterowanego wpływa na jego postać i wymaganą dokładność. W fazie poznawczej model służy do zbadania możliwości





sterowania procesem oraz ujawnienia jego charakterystycznych właściwości. Model taki może stanowić punkt wyjścia do stworzenia prostszych, bardziej wyspecjalizowanych modeli tego samego obiektu. W fazie projektowania systemu sterowania, modele obiektu sterowanego są używane do wyznaczenia odpowiedniej struktury i parametrów układu sterowania, aby zapewnić najlepszą realizację zadania sterowania.

2. Podstawy teoretyczne sterowania procesami

Sterowanie procesami to dziedzina inżynierii, która obejmuje projektowanie i wdrażanie systemów sterujących, które mają na celu kontrolowanie i optymalizowanie procesów technologicznych. Sterowanie procesami jest niezbędne w wielu gałęziach przemysłu, takich jak chemia, przemysł spożywczy, farmaceutyczny, energetyka i inne.

Celem sterowania procesami jest osiągnięcie założonego rezultatu, zachowując odpowiednią jakość, wydajność i minimalizując koszty operacyjne. W tym kontekście, kluczowym zadaniem inżyniera sterowania jest stworzenie odpowiednich modeli, które mogą być użyte do przewidywania zachowań systemu oraz projektowania algorytmów sterujących, które zapewnią osiągnięcie celów.

Teoria układów dynamicznych jest podstawą dla zrozumienia, jak zmieniają się właściwości układu w czasie pod wpływem oddziaływań zewnętrznych i wewnętrznych. Każdy układ dynamiczny jest opisany za pomocą równań matematycznych, które definiują zmiany stanu tego układu w odpowiedzi na różne sygnały wejściowe.

Układ dynamiczny to zbiór elementów powiązanych ze sobą, które zmieniają swój stan w czasie, a ich zmiany są zależne od wcześniejszych stanów oraz oddziaływań zewnętrznych. Modele matematyczne takich układów pozwalają na opisanie zmienności ich stanu i przewidywanie przyszłych zachowań.

Układy dynamiczne można podzielić na kilka podstawowych kategorii:

1. Układy liniowe — gdzie zależności między wejściami a wyjściami są proporcjonalne i mogą być opisane równaniami liniowymi.
2. Układy nieliniowe — w których zależności są bardziej złożone i wymagają zaawansowanych narzędzi matematycznych do analizy.
3. Układy o stałej strukturze — gdzie parametry układu nie zmieniają się w czasie.
4. Układy o zmiennej strukturze — gdzie parametry mogą zmieniać się w odpowiedzi na zmienne warunki zewnętrzne lub wewnętrzne.

Podstawowe zasady sterowania obejmują:



- Sterowanie w pętli otwartej — stosowane, gdy układ nie ma możliwości pomiaru stanu wyjściowego i reagowania na zmiany w czasie rzeczywistym. Jest to stosunkowo prostsze podejście, ale może prowadzić do błędów w przypadku zakłóceń.

- Sterowanie w pętli zamkniętej — wykorzystuje informacje o stanie wyjściowym do korekcji sygnałów wejściowych, zapewniając stabilność i precyzyjniejsze działanie układu.

W procesach przemysłowych wykorzystywane są różne metody sterowania:

1. Sterowanie PID — jest to jedna z najpopularniejszych metod, polegająca na zastosowaniu proporcjonalnej, całkowej i różniczkowej korekcji sygnałów wejściowych w odpowiedzi na błąd między wartością zadaną a wartością rzeczywistą.

2. Sterowanie adaptacyjne — stosowane w przypadku, gdy parametry układu mogą się zmieniać w czasie. Algorytmy adaptacyjne dostosowują ustawienia regulatora na podstawie analizy zmieniających się warunków.

3. Sterowanie optymalne — polega na wyborze takich parametrów sterowania, które maksymalizują efektywność procesu, minimalizując jednocześnie zużycie zasobów, takich jak energia, surowce czy czas.

W praktyce, sterowanie procesami jest stosowane w szerokim zakresie aplikacji, takich jak:

- Automatyzacja linii produkcyjnych — zapewnia optymalne ustawienie parametrów procesów produkcyjnych, minimalizując odpady i poprawiając jakość.

- Zarządzanie energią — sterowanie zużyciem energii w procesach przemysłowych, np. poprzez dostosowanie pracy urządzeń do rzeczywistych potrzeb.

- Kontrola jakości — zapewnienie odpowiedniej jakości produktów poprzez monitorowanie procesów i wprowadzenie odpowiednich korekt w czasie rzeczywistym.

3. Teoria układów dynamicznych

Teoria układów dynamicznych jest podstawą zrozumienia, jak układy fizyczne, mechaniczne, elektryczne czy biologiczne zmieniają swój stan w odpowiedzi na różnorodne oddziaływania zewnętrzne oraz wewnętrzne. Układy dynamiczne są wszechobecne w inżynierii i naukach przyrodniczych, ponieważ każdy układ, który podlega zmianom w czasie, można opisać za pomocą tej teorii. Celem tej teorii jest opracowanie narzędzi, które umożliwią przewidywanie i kontrolowanie zachowań układów w odpowiedzi na zadane bodźce.





Układ dynamiczny to system, którego stan zmienia się w czasie w zależności od oddziaływań zewnętrznych, wewnętrznych, a także jego początkowego stanu. W inżynierii, znajomość dynamicznego zachowania układu jest kluczowa dla jego sterowania i optymalizacji. W tym kontekście teoria układów dynamicznych dostarcza narzędzi i metod analizy tych układów oraz ich sterowania.

Układ dynamiczny jest systemem, który zmienia swój stan w czasie. Stan układu to zbiór zmiennych, które w pełni opisują jego zachowanie w danym momencie. W układach dynamicznych zwykle wyróżniamy trzy podstawowe składniki:

- Zmienne wejściowe: reprezentują czynniki zewnętrzne, które wpływają na układ. Mogą to być siły, napięcia, temperatury czy przepływy.
- Zmienne stanu: są to zmienne, które opisują aktualny stan układu w danym czasie. Dla układu mechanicznego mogą to być prędkości, pozycje, momenty sił, a w układach elektronicznych napięcia i prądy.
- Zmienne wyjściowe: to zmienne, które odzwierciedlają efekty działania układu, które można zmierzyć lub obserwować, np. prędkość obrotową silnika, temperaturę lub ciśnienie.

W układzie dynamicznym zmiany stanu układu zależą od jego wcześniejszego stanu oraz od oddziaływań zewnętrznych i wewnętrznych, które są reprezentowane przez wejścia. Układ dynamiczny można opisać matematycznie za pomocą równań różniczkowych, które określają, jak zmieniają się zmienne stanu w czasie w odpowiedzi na różne sygnały wejściowe i zakłócenia.

W najprostszym przypadku, układ dynamiczny opisuje się za pomocą równań różniczkowych. Istnieją dwa główne typy równań różniczkowych, które można stosować w tej teorii:

1. Równania różniczkowe zwyczajne (ODE - Ordinary Differential Equations) – stosowane w przypadkach, gdy układ zmienia się w czasie w sposób ciągły.
2. Równania różniczkowe cząstkowe (PDE - Partial Differential Equations) – stosowane, gdy układ zależy od kilku zmiennych niezależnych, np. od czasu i przestrzeni (stosowane np. w analizie procesów cieplnych lub przepływu płynów).

Równania te mogą być pierwszego, drugiego lub wyższych rzędów, w zależności od liczby zmiennych stanu w układzie.

Układy dynamiczne dzielimy na różne kategorie w zależności od ich zachowań i charakterystyki:

1. Układy liniowe: Są to układy, w których zmiany zmiennych stanu są proporcjonalne do zmiennych wejściowych. Równania opisujące te układy są liniowe względem zmiennych stanu i wejściowych. Układy liniowe są łatwiejsze do analizy i mają dobrze opracowane metody analizy i sterowania (np. funkcja przejścia, transmitancje).



2. Układy nieliniowe: W układach nieliniowych zależność między zmiennymi stanu a zmiennymi wejściowymi jest nieliniowa. Układy te charakteryzują się bardziej złożonym zachowaniem, w tym chaotycznością, bifurkacjami i innymi trudnymi do przewidzenia efektami. Analiza układów nieliniowych wymaga zaawansowanych metod matematycznych, takich jak metoda przybliżeń, analiza stabilności nieliniowej czy stosowanie algorytmów numerycznych.

3. Układy dyskretnie: Są to układy, w których zmiany stanu zachodzą w dyskretnych krokach czasowych. Układy dyskretnie są opisywane przez równania różnicowe, a ich analiza wymaga technik charakterystycznych dla analizy układów cyfrowych i sterowania dyskretnego.

4. Układy ciągłe: Układy, które zmieniają swój stan w sposób ciągły w czasie, są opisane równaniami różniczkowymi. Są to najbardziej powszechne układy w inżynierii, takie jak układy mechaniczne, elektryczne, cieplne.

Stabilność układu jest jednym z kluczowych pojęć w teorii układów dynamicznych. Układ jest stabilny, jeśli jego stan nie zbacza w sposób niekontrolowany w odpowiedzi na zakłócenia lub zmiany parametrów. Stabilność układu zależy od charakterystyki jego równań różniczkowych oraz od sposobu wprowadzenia wejść do układu.

Istnieją różne metody analizy stabilności:

Stabilność według Lapunova – Jest to podejście oparte na teorii funkcji Lapunova, które pozwala na ocenę, czy układ pozostaje stabilny w odpowiedzi na niewielkie zakłócenia.

Analiza biegunów układu – W przypadku układów liniowych stabilność układu można ocenić na podstawie biegunów funkcji przejścia. Układ jest stabilny, jeśli wszystkie bieguny leżą w lewej półpłaszczyźnie zespolonej.

Kryterium Nyquista – Jest to metoda analizy stabilności układów dynamicznych oparta na wykresie Nyquista, który pokazuje, czy obwód zamknięty posiada stabilność na podstawie analizy charakterystyki częstotliwościowej.

Kryterium Hurwitza – Stosowane dla układów liniowych, polega na analizie wyznacznika macierzy Hurwitza, aby określić stabilność układu na podstawie współczynników równania charakterystycznego.

Kryterium Routha-Hurwitza – Pozwala na określenie stabilności układu dynamicznego bez konieczności znajdowania biegunów, poprzez analizę tabeli Routha utworzonej na podstawie współczynników wielomianu charakterystycznego.

Analiza odpowiedzi impulsowej i skokowej – Weryfikacja stabilności układu na podstawie jego reakcji na sygnały testowe, takie jak impuls jednostkowy lub skok jednostkowy. Układ stabilny nie powinien wykazywać nieograniczonego wzrostu odpowiedzi w czasie.



Stabilność w sensie BIBO (Bounded Input - Bounded Output) – Układ jest stabilny, jeśli dla każdego ograniczonego wejścia generuje ograniczone wyjście. Jest to szczególnie przydatne w analizie układów o nieznanymi dokładnymi parametrami.

Analiza miejsca zerowego (Zero Dynamics Stability) – W niektórych systemach analiza stabilności może wymagać uwzględnienia stabilności dynamiki związanej z zerami układu, szczególnie w przypadku układów sterowania adaptacyjnego lub układów wielowymiarowych (MIMO).

Analiza stabilności układów nieliniowych (np. metoda opisowa Popowa lub metoda równań różniczkowych) – W przypadku układów nieliniowych analiza stabilności może wymagać bardziej zaawansowanych narzędzi, takich jak metoda Popowa, analiza całkowalności równań różniczkowych czy metody bifurkacyjne.

Każda z tych metod jest stosowana w zależności od charakterystyki układu oraz dostępnych danych dotyczących jego modelu matematycznego.

Zrozumienie teorii układów dynamicznych jest kluczowe dla projektowania efektywnych systemów sterowania. Modele dynamiczne służą do:

- Optymalizacji procesu — umożliwiają przewidywanie reakcji układu na różne sygnały wejściowe i zakłócenia, co pozwala na zaprojektowanie algorytmów sterujących minimalizujących straty i poprawiających wydajność.
- Analizy stabilności układu — za pomocą metod analitycznych, takich jak analiza biegunów czy funkcji Lapunova, można ocenić, jak układ reaguje na zmiany parametrów i zakłócenia.
- Projektowania algorytmów sterujących — dzięki znajomości dynamiki układu, inżynierowie mogą zaprojektować odpowiednie strategie sterowania (np. sterowanie PID, adaptacyjne, optymalne), które zapewnią stabilność i efektywność procesów.

4. Przykłady zastosowań modelowania

Modelowanie matematyczne i symulacyjne odgrywa kluczową rolę w analizie i projektowaniu układów dynamicznych. W tym rozdziale przedstawiono dwa przykłady zastosowań modelowania w dziedzinie mechatroniki i automatyki: model manipulatora dwuczłonowego oraz model układu Twin Rotor.

Pierwszy z omawianych modeli dotyczy dwuczłonowego manipulatora, którego dynamiczne równania ruchu zostały wyprowadzone na podstawie równań Lagrange'a. Model ten uwzględnia siły i momenty działające na układ, co pozwala na analizę jego zachowania w odpowiedzi na różne sygnały sterujące. Przedstawione symulacje umożliwiają ocenę wpływu parametrów regulatora na dokładność i stabilność ruchu manipulatora.



Drugi model to Twin Rotor, który jest przykładem systemu o nieliniowej dynamice, nawiązującego do sterowania śmigłowcem. W modelu uwzględniono oddziaływania aerodynamiczne, momenty bezwładności oraz siły generowane przez silniki. Przeprowadzona analiza pozwala na ocenę jakości sterowania oraz wpływu różnych parametrów na stabilność i precyzję ruchu wirników.

Oba modele pokazują, jak poprzez odpowiednie modelowanie można lepiej zrozumieć dynamikę układów oraz skutecznie projektować algorytmy sterowania, co znajduje szerokie zastosowanie w robotyce, lotnictwie i automatyzacji procesów.

4.1. Manipulator płaski o dwóch stopniach swobody

Przykładem systemu o dwóch stopniach swobody, który jest istotny w automatyce i robotyce, jest dwuczłonowy manipulator płaski. Możemy go przedstawić jako układ dwóch ciał połączonych przegubami obrotowymi, gdzie każdy człon ma swoją masę.

Dla manipulatora przedstawionego na rysunku 1 wyprowadzono odpowiednie zależności geometryczne, przy pomocy których zdefiniowano energię kinetyczną i potencjalną układu.

[Tekst alternatywny. Rysunek 1 przedstawia schematyczny model manipulatora dwuczłonowego w układzie współrzędnych (y, z). Manipulator składa się z dwóch przegubów obrotowych oraz dwóch ramion oznaczonych jako r_1 i r_2 .

Elementy rysunku:

Podstawa – nieruchoma część manipulatora, z której wychodzi pierwsze ramię.

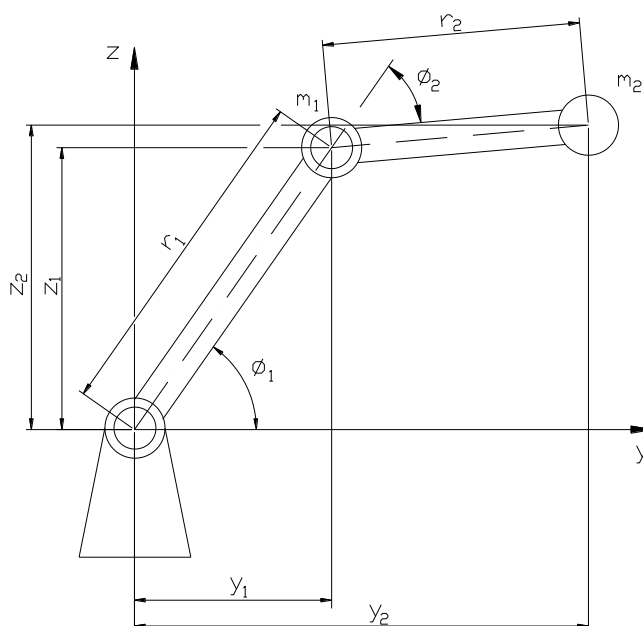
Pierwszy przegub (r_1, φ_1) – połączony z podstawą, umożliwia obrót pierwszego ramienia o kąt φ_1 .

Pierwsze ramię (l_1) – element łączący pierwszy przegub z drugim.

Drugi przegub (r_2, φ_2) – umiejscowiony na końcu pierwszego ramienia, pozwala na obrót drugiego ramienia o kąt φ_2 .

Drugie ramię (l_2) – końcowa część manipulatora, której położenie zależy od kątów φ_1 i φ_2 .

Manipulator porusza się w płaszczyźnie y-z, co oznacza, że jego ruch ogranicza się do dwóch wymiarów. Pozycja końcówki jest określona przez długości ramion oraz kąty obrotów przegubów.]



Rys. 1. Manipulator płaski o dwóch stopniach swobody.

$$z_1 = r_1 \sin(\varphi_1(t)) \quad (1)$$

$$z_2 = z_1 + r_2 \sin(\varphi_1(t) + \varphi_2(t)) = r_1 \sin(\varphi_1(t)) + r_2 \sin(\varphi_1(t) + \varphi_2(t)) \quad (2)$$

$$y_1 = r_1 \cos(\varphi_1(t)) \quad (3)$$

$$y_2 = y_1 + r_2 \cos(\varphi_1(t) + \varphi_2(t)) = r_1 \cos(\varphi_1(t)) + r_2 \cos(\varphi_1(t) + \varphi_2(t)) \quad (4)$$

gdzie: z_1, z_2, y_1, y_2 oznaczają współrzędne geometryczne, r_1, r_2 długości ramion manipulatora, φ_1, φ_2 pełnią rolę współrzędnych uogólnionych.

Po zróźniczkowaniu powyższych równań otrzymujemy:

$$\dot{z}_1 = r_1 \cos(\varphi_1(t)) \dot{\varphi}_1(t) \quad (5)$$

$$\dot{z}_2 = r_1 \cos(\varphi_1(t)) \dot{\varphi}_1(t) + r_2 \cos(\varphi_1(t) + \varphi_2(t)) (\dot{\varphi}_1(t) + \dot{\varphi}_2(t)) \quad (6)$$

$$\dot{y}_1 = -r_1 \sin(\varphi_1(t)) \dot{\varphi}_1(t) \quad (7)$$

$$\dot{y}_2 = -r_1 \sin(\varphi_1(t)) \dot{\varphi}_1(t) - r_2 \sin(\varphi_1(t) + \varphi_2(t)) (\dot{\varphi}_1(t) + \dot{\varphi}_2(t)) \quad (8)$$



gdzie: $\dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2$ oznaczają składowe prędkości liniowej, $\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2$ to prędkości kątowe.

Mając składowe prędkości możemy obliczyć kwadrat wartości prędkości liniowych poszczególnych ramion a następnie podstawić je do wzoru na energię kinetyczną.

$$v_1^2 = \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2 = r_1^2 \dot{\phi}_1^2(t) \quad (9)$$

$$v_2^2 = \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2 = 2r_1 r_2 \dot{\phi}_1^2(t) \cos(\phi_2(t)) + 2r_1 r_2 \dot{\phi}_1(t) \dot{\phi}_2(t) \cos(\phi_2(t)) + 2r_2^2 \dot{\phi}_1(t) \dot{\phi}_2(t) + r_1^2 \dot{\phi}_1(t) + r_2^2 \dot{\phi}_1(t) + r_2^2 \dot{\phi}_2(t) \quad (10)$$

Energia kinetyczna układu jest równa sumie energii kinetycznej poszczególnych ramion.

$$E = \sum_{i=1}^2 \frac{m_i v_i^2}{2} = m_1 \frac{v_1^2}{2} + m_2 \frac{v_2^2}{2} \quad (11)$$

Tak więc:

$$E = \frac{m_1}{2} r_1^2 \dot{\phi}_1^2(t) + \frac{m_2}{2} (2r_1 r_2 \dot{\phi}_1^2(t) \cos(\phi_2(t)) + 2r_1 r_2 \dot{\phi}_1(t) \dot{\phi}_2(t) \cos(\phi_2(t)) + 2r_2^2 \dot{\phi}_1(t) \dot{\phi}_2(t) + r_1^2 \dot{\phi}_1(t) + r_2^2 \dot{\phi}_1(t) + r_2^2 \dot{\phi}_2(t)) \quad (12)$$

Energia potencjalna układu jest równa sumie energii potencjalnej poszczególnych ramion:

$$U = \sum_{i=1}^2 m_i g z_i = m_1 g z_1 + m_2 g z_2 \quad (13)$$

Tak więc:

$$U = m_1 g r_1 \sin(\phi_1(t)) + m_2 g (r_1 \sin(\phi_1(t)) + r_2 \sin(\phi_1(t) + \phi_2(t))) \quad (14)$$

gdzie: m_1, m_2 - oznaczają masy poszczególnych ramion, r_1, r_2 - długości ramion, g - przyspieszenie ziemskie.

Stosując metodę równań Lagrange'a II rodzaju, otrzymujemy odpowiednie zależności:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{\phi}_1(t)} - \frac{\partial E}{\partial \phi_1(t)} + \frac{\partial U}{\partial \phi_1(t)} = \tau_1 \quad (15)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{\phi}_2(t)} - \frac{\partial E}{\partial \phi_2(t)} + \frac{\partial U}{\partial \phi_2(t)} = \tau_2 \quad (16)$$

gdzie: τ_1, τ_2 - siły uogólnione

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{\phi}_1(t)} &= m_1 r_1^2 \ddot{\phi}_1(t) + m_2 r_1^2 \ddot{\phi}_1(t) + m_2 r_2^2 \ddot{\phi}_1(t) + 2m_2 r_1 r_2 \ddot{\phi}_1(t) \cos(\phi_2(t)) \\ &\quad - 2m_2 r_1 r_2 \dot{\phi}_1(t) \dot{\phi}_2(t) \sin(\phi_2(t)) + m_2 r_1 r_2 \ddot{\phi}_2(t) \cos(\phi_2(t)) - m_2 r_1 r_2 \dot{\phi}_2^2(t) \sin(\phi_2(t)) \\ &\quad + m_2 r_2^2 \ddot{\phi}_2(t) \end{aligned} \quad (17)$$



$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_2(t)} = m_2 r_2^2 \ddot{\varphi}_2(t) + m_2 r_1 r_2 \ddot{\varphi}_1(t) \cos(\varphi_2(t)) - m_2 r_1 r_2 \dot{\varphi}_1(t) \dot{\varphi}_2(t) \sin(\varphi_2(t)) \quad (18)$$

$$+ m_2 r_2^2 \ddot{\varphi}_1(t)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi_1(t)} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi_2(t)} = -m_2 r_1 r_2 \dot{\varphi}_1^2(t) \sin(\varphi_2(t)) - m_2 r_1 r_2 \dot{\varphi}_1(t) \dot{\varphi}_2(t) \sin(\varphi_2(t)) \quad (20)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_1(t)} = m_1 r_1 g \cos(\varphi_1(t)) + m_2 g (r_1 \cos(\varphi_1(t)) + r_2 \cos(\varphi_1(t) + \varphi_2(t))) \quad (21)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_2(t)} = m_2 r_2 g \cos(\varphi_1(t) + \varphi_2(t)) \quad (22)$$

Po podstawieniu do wzorów (15) i (16) otrzymujemy końcowe równania dynamiki manipulatora:

$$(m_1 r_1^2 + m_2 r_1^2 + m_2 r_2^2 + 2m_2 r_1 r_2 \cos(\varphi_2(t))) \ddot{\varphi}_1(t) - 2m_2 r_1 r_2 \dot{\varphi}_1(t) \dot{\varphi}_2(t) \sin(\varphi_2(t)) \quad (23)$$

$$+ (m_2 r_1 r_2 \cos(\varphi_2(t)) + m_2 r_2^2) \ddot{\varphi}_2(t) - m_2 r_1 r_2 \dot{\varphi}_2^2(t) \sin(\varphi_2(t))$$

$$+ m_1 r_1 g \cos(\varphi_1(t)) + m_2 g (r_1 \cos(\varphi_1(t)) + r_2 \cos(\varphi_1(t) + \varphi_2(t))) = \tau_1$$

$$(m_2 r_1 r_2 \cos(\varphi_2(t)) + m_2 r_2^2) \ddot{\varphi}_1(t) + m_2 r_2^2 \ddot{\varphi}_2(t) + m_2 r_1 r_2 \dot{\varphi}_1^2(t) \sin(\varphi_2(t)) \quad (24)$$

$$+ m_2 r_2 g \cos(\varphi_1(t) + \varphi_2(t)) = \tau_2$$

Zapis równań (23) i (24) można zrealizować w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1(t) \\ \ddot{\varphi}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \setminus \left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\dot{\varphi}_1(t))^2 \\ (\dot{\varphi}_2(t))^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{22} \end{bmatrix} (\dot{\varphi}_1(t) * \dot{\varphi}_2(t)) - \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{bmatrix} g + \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{bmatrix} \right) \quad (25)$$

$$a_{11} = m_1 r_1^2 + m_2 r_1^2 + m_2 r_2^2 + 2m_2 r_1 r_2 \cos(\varphi_2(t)) \quad (26)$$

$$a_{12} = m_2 r_1 r_2 \cos(\varphi_2(t)) + m_2 r_2^2 \quad (27)$$

$$a_{21} = m_2 r_1 r_2 \varphi_2(t) + m_2 r_2^2 \quad (28)$$

$$a_{22} = m_2 r_2^2 \quad (29)$$

$$b_{11} = 0 \quad (30)$$

$$b_{12} = m_2 r_1 r_2 \sin(\varphi_2(t)) \quad (31)$$

$$b_{21} = -m_2 r_1 r_2 \sin(\varphi_2(t)) \quad (32)$$





$$b_{1_{22}} = 0 \quad (33)$$

$$b_{2_{11}} = -2m_2 r_1 r_2 \sin(\varphi_2(t)) \quad (34)$$

$$b_{2_{21}} = 0 \quad (35)$$

$$d_{11} = (m_1 + m_2)r_1 \cos(\varphi_1(t)) + m_2 r_2 \cos(\varphi_1(t) + \varphi_2(t)) \quad (36)$$

$$d_{21} = m_2 r_2 \cos(\varphi_1(t) + \varphi_2(t)) \quad (37)$$

$$\tau_1 = t_{11} = Kp_1(S_1 - \varphi_1(t)) - Kd_1 \dot{\varphi}_1(t) \quad (38)$$

$$\tau_2 = t_{21} = Kp_2(S_2 - \varphi_2(t)) - Kd_2 \dot{\varphi}_2(t) \quad (39)$$

gdzie: S_1 i S_2 – sygnały zadane, Kp_1, Kp_2, Kd_1, Kd_2 - nastawy regulatorów

Niniejszy skrypt przedstawia symulację sterowania manipulatorem dwuprzegubowym przy użyciu regulatorów PD. Model został opracowany na podstawie równań ruchu dla układu o dwóch stopniach swobody, uwzględniając dynamikę układu oraz nieliniowe sprzężenia między przegubami.

Model opiera się na równaniach ruchu sformułowanych w postaci macierzowej, uwzględniających wpływ masy, długości ramion oraz sił grawitacyjnych. Sygnał sterujący jest generowany w oparciu o regulatory PD, które dążą do minimalizacji uchybu względem zadanych wartości kątowych.

Symulacja została przeprowadzona z wykorzystaniem funkcji ode45, która numerycznie rozwiązuje układ równań różniczkowych. Wynikiem symulacji są wykresy przedstawiające zmiany kątów przegubów oraz ich prędkości kątowych w czasie.

```
clc; clear; close all;
```

```
% Definicja zmiennych globalnych
```

```
global kroki m1 m2 r1 r2 g Kp1 Kd1 Kp2 Kd2
```

```
% Parametry
```

```
m1 = 25;
```

```
m2 = 20;
```

```
r1 = 0.8;
```

```
r2 = 0.6;
```

```
g = 9.81;
```

```
Kp1 = 80000;
```

```
Kd1 = 500;
```

```
Kp2 = 110000;
```





```

Kd2 = 650;

% Ustawienia symulacji
t0 = 0;
t2 = 6;
x0 = [0 0 0 0];
kroki = 0;

% Symulacja
[t, x] = ode45(@row2t, [t0, t2], x0);

% Wyświetlenie ilości kroków
disp('Obliczenia wykonano dla następującej ilości kroków:');
disp(kroki);

% Wykresy
figure;
plot(t, x(:,1), t, x(:,3)), title('$\varphi_1, \varphi_2$', 'Interpreter',
'latex');
legend('$\varphi_1$', '$\varphi_2$', 'Interpreter', 'latex');
xlabel('$t$ [s]', 'Interpreter', 'latex');
ylabel('$\varphi$ [rad]', 'Interpreter', 'latex');
grid on;
saveas(gcf, 'sterowanie_pd_mani_2r.bmp');
hold off;

figure;
plot(t, x(:,2), t, x(:,4)), title('$\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$',
'Interpreter', 'latex');
legend('$\dot{\varphi}_1$', '$\dot{\varphi}_2$', 'Interpreter', 'latex');
xlabel('$t$ [s]', 'Interpreter', 'latex');
ylabel('$\dot{\varphi}$ [rad/s]', 'Interpreter', 'latex');
grid on;

% Funkcja równań różniczkowych układu
function dy = row2t(t, y)
    global kroki m1 m2 r1 r2 g Kp1 Kd1 Kp2 Kd2
    kroki = kroki + 1;

    S = sygzad(t);
    dy = zeros(4,1);
    dy(1) = y(2);
    dy(3) = y(4);

    A = [(m1*r1^2 + m2*r1^2 + m2*r2^2 + 2*m2*r1*r2*cos(y(3))), (m2*r1*r2*cos(y(3))
+ m2*r2^2);
        (m2*r1*r2*cos(y(3)) + m2*r2^2), (m2*r2^2)];

    B1 = [0, m2*r1*r2*sin(y(3)); -m2*r1*r2*sin(y(3)), 0];

    B2 = [-2*m2*r1*r2*sin(y(3)); 0];

```





```

D = [(m1+m2)*r1*cos(y(1)) + m2*r2*cos(y(1)+y(3));
      m2*r2*cos(y(1)+y(3))];

T = [(Kp1*(S(1)-y(1)) - Kd1*y(2)); (Kp2*(S(2)-y(3)) - Kd2*y(4))];

x = A \ (B1 * [y(2)^2; y(4)^2] - B2 * (y(2)*y(4)) - D*g + T);

dy(2) = x(1);
dy(4) = x(2);
end

% Funkcja sygnału zadanego
function fu = sygzad(t)
    fu = [0; 0]; % Inicjalizacja wektora
    if t > 1
        fu(1) = 0.5;
    end
    if t > 4
        fu(2) = 0.5;
    end
end
end

```

Wykres 2 przedstawia przebieg kątów $\varphi_1(t)$ i $\varphi_2(t)$ w czasie dla manipulatora płaskiego. Sygnały te odpowiadają położeniu kątowemu pierwszego i drugiego członu manipulatora w odpowiedzi na zadane sterowanie. Można zaobserwować, jak układ dynamicznie reaguje na zadane wartości, dążąc do osiągnięcia stabilnego stanu. Charakterystyka przebiegu wskazuje na wpływ parametrów regulatora – szybkość osiągania wartości zadanych oraz ewentualne oscylacje mogą wynikać z dobranych nastaw sterowania. Analiza tego wykresu pozwala ocenić skuteczność zastosowanego regulatora oraz zrozumieć dynamikę manipulatora w różnych warunkach pracy.

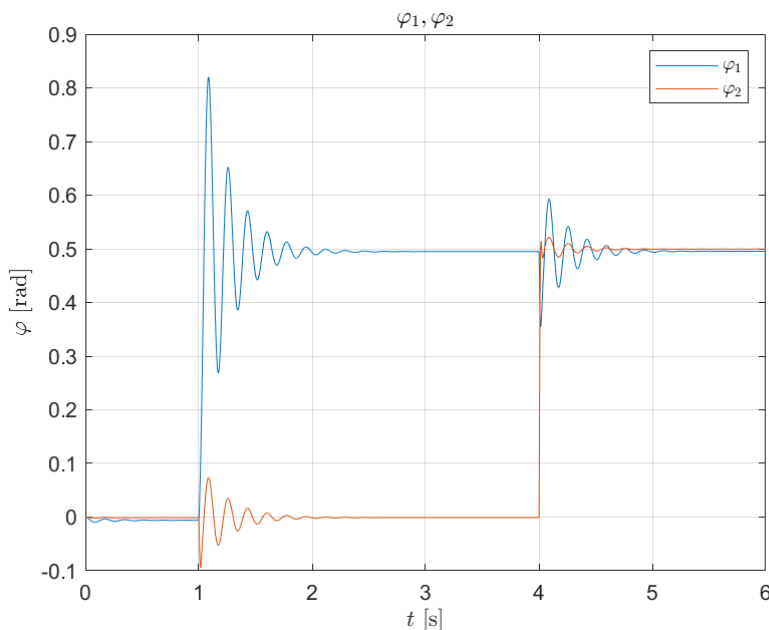
[Tekst alternatywny. Wykres 2 przedstawia przebiegi czasowe dwóch zmiennych kątowych φ_1 oraz φ_2 w funkcji czasu t .

Oś pozioma (x), oznaczona jako $t[s]$, reprezentuje czas w sekundach. Zakres czasu wynosi od 0 do 6 sekund.

Oś pionowa (y), oznaczona jako $\varphi[rad]$, przedstawia wartość kątów w radianach. Zakres wartości wynosi od -0.1 do 0.9 rad.

Krzywe na wykresie: niebieska linia (φ_1) – przedstawia zmiany kąta φ_1 w czasie. Widać gwałtowny skok około 1 sekundy oraz oscylacje tłumione. Pomarańczowa linia (φ_2) – przedstawia zmiany kąta φ_2 . Przebieg ten również ma skokowe zmiany, ale o innej charakterystyce niż φ_1 .

Wykres pokazuje, że układ reaguje na zmiany sygnałów wejściowych, powodując dynamiczne oscylacje w pierwszym przegubie (φ_1) oraz bardziej stłumioną reakcję w drugim przegubie (φ_2).]



Rys. 2. Odpowiedź układu - manipulator płaski.

4.2. Model podwójnego wirnika - Twin Rotor

Układ podwójnego wirnika jest obiektem MIMO, czyli urządzeniem posiadającym dwa wejścia i dwa wyjścia. Rysunek 3 i 4 przedstawia płaszczyznę pionową i poziomą z uwzględnieniem najważniejszych elementów, tj. działających sił, odległości oraz kątów.

[Tekst alternatywny. Rysunek 3 przedstawia model podwójnego wirnika (Twin Rotor) w płaszczyźnie pionowej w układzie współrzędnych (X, Y). Jest to system z dwoma wirnikami napędzanymi silnikami DC, które generują siły nośne i momenty wpływające na dynamikę ruchu układu.

Elementy rysunku:

Podstawa – nieruchoma część konstrukcji, stanowiąca punkt mocowania mechanizmu.

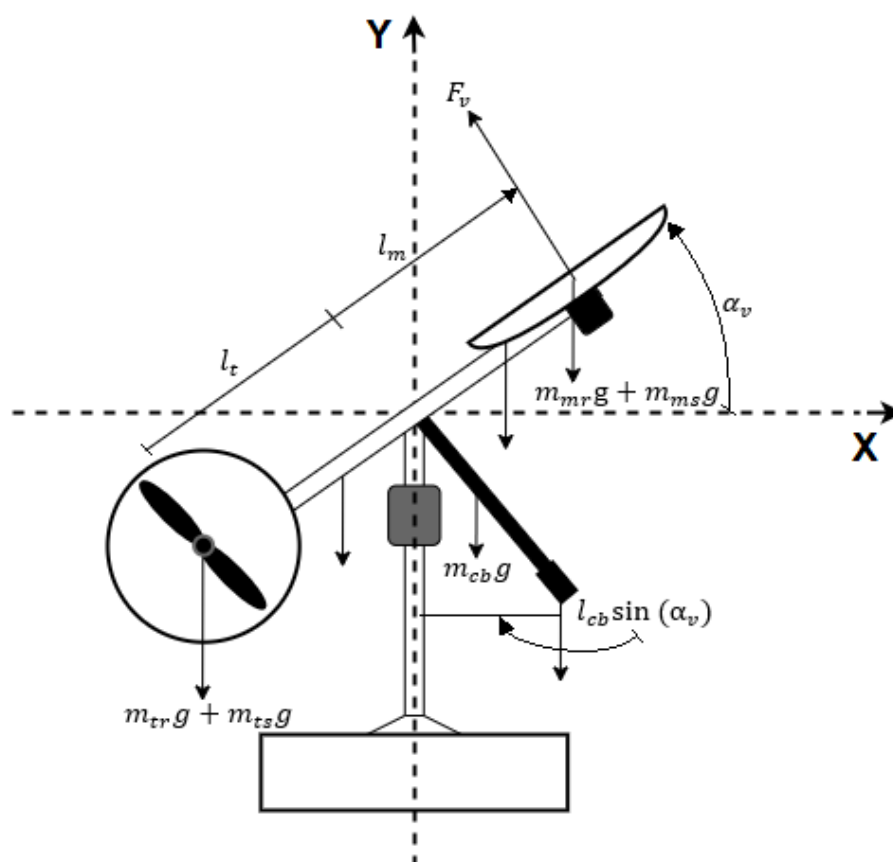
Ramię główne (l_m) – przegubowo połączone z podstawą, umożliwia obrót całego układu wokół osi obrotu.

Wirniki – umieszczone na końcach ramienia, odpowiadające za generowanie siły nośnej i momentu obrotowego:

Wirnik główny (prawy) – generuje siłę nośną i odpowiada za sterowanie kątem pochylenia belki α_v .

Wirnik pomocniczy (lewy) – odpowiada za moment wokół osi ramienia.

Przeciwwaga stabilizująca – przymocowana do ramienia, wspomaga kontrolę nad ruchem systemu.]



Rys. 3. Model podwójnego wirnika – płaszczyzna pionowa.

Model matematyczny jest opracowany przy pewnych uproszczeniach. Po pierwsze, przyjmuje się, że dynamikę układu napędu śmigła można opisać równaniami różniczkowymi pierwszego rzędu. Dodatkowo zakłada się, że tarcie w systemie ma charakter lepki. Przyjmuje się również, że układ śmigło-powietrze może być opisany zgodnie z postulatami teorii przepływu.

Powyższe założenia pozwalają na wyraźne określenie problemu. Po pierwsze, rozważmy obrót belki w płaszczyźnie pionowej, tj. wokół osi poziomej. Mając na



uwadze, że momenty obrotowe są generowane przez śmigła, obrót można w zasadzie opisać jako ruch wahadła.

Z drugiego prawa Newtona uzyskujemy:

$$M_v = \sum_{i=1}^4 M_{vi} = J_v \frac{d^2 \alpha_v}{dt^2} = M_{v1} + M_{v2} + M_{v3} + M_{v4} \quad (40)$$

gdzie:

M_v – to całkowity moment sił w płaszczyźnie pionowej,

J_v - to suma momentów bezwładności względem osi poziomej,

α_v - to kąt pochylenia belki,

$$M_{v1} = g * ((A - B) \cos \alpha_v - C \sin \alpha_v) \quad (41)$$

M_{v1} – moment powstały na skutek przyciągania ziemskiego,

$$M_{v2} = l_m F_v(\omega_m) \quad (42)$$

M_{v2} - moment siły napędowej generowany przez główny wirnik,

$$M_{v3} = -\Omega_h^2 (A + B + C) \sin \alpha_v \cos \alpha_v \quad (43)$$

M_{v3} – moment sił odśrodkowych odpowiadający ruchowi belki wokół osi pionowej,

gdzie:

$$A = \left(m_{ts} + m_{tr} + \frac{m_t}{2} \right) l_t \quad (44)$$

$$B = \left(m_{mr} + m_{ms} + \frac{m_m}{2} \right) l_m \quad (45)$$

$$C = \left(m_{cb} l_{cb} + m_b \frac{l_b}{2} \right) \quad (46)$$

gdzie:

l_t – długość tylnej części belki,

l_m – długość głównej części belki,

l_b – długość belki przeciwwagi,

l_{cb} – odległość przeciwwagi od przegubu,

m_{tr} – masa pomocniczej tarczy,



m_{mr} – masa głównej tarczy,
 m_{cb} – masa przeciwwagi,
 m_t – masa pomocniczej części belki,
 m_m – masa głównej części belki,
 m_b – masa belki przeciwwagi,
 m_{ts} – masa pomocniczej tarczy,
 m_{ms} – masa głównej tarczy,
 g - przyspieszenie ziemskie.

$$M_{v4} = -\Omega_v k_v \quad (47)$$

M_{v4} – moment tarcia zależny od prędkości kątowej belki wokół osi poziomej,
 gdzie:

$$\frac{d\alpha_v}{dt} = \Omega_v \quad (48)$$

Ω_v – to prędkość kątowa wokół osi poziomej,
 k_v – to stała.

Zgodnie z rysunkiem 3 możemy określić składniki momentu bezwładności względem osi poziomej. Zauważmy, że ten moment jest niezależny od położenia belki.

Całkowity moment bezwładności względem płaszczyzny pionowej podwójnego wirnika:

$$J_v = \sum_{i=1}^8 J_{vi} \quad (49)$$

gdzie:

$J_{v1} = m_{mr} l_m^2$ – moment bezwładności głównego wirnika z silnikiem,
 $J_{v2} = m_m \frac{l_m^2}{3}$ – moment bezwładności belki głównego wirnika,
 $J_{v3} = m_{cb} l_{cb}^2$ – moment bezwładności dla walca przeciwwagi,



$J_{v4} = m_b \frac{l_b^2}{3}$ – moment bezwładności pręta przeciwwagi,

$J_{v5} = m_{tr} l_t^2$ – moment bezwładności tylnego wirnika z silnikiem,

$J_{v6} = m_t \frac{l_t^2}{3}$ – moment bezwładności belki tylnego wirnika,

$J_{v7} = \left(\frac{m_{ms}}{2} r_{ms}^2\right) + (m_{ms} l_m^2)$ – moment bezwładności tarczy głównego wirnika,

$J_{v8} = (m_{ts} r_{ts}^2) + (m_{ts} l_t^2)$ – moment bezwładności tarczy tylnego wirnika,

r_{ms} – promień głównej tarczy,

r_{ts} – promień tylnej tarczy.

Podobnie, możemy opisać ruch belki wokół osi pionowej, mając na uwadze, że momenty obrotowe są generowane przez wirniki, a moment bezwładności zależy od kąta pochylenia belki. Poziomy ruch belki (wokół osi pionowej) można opisać jako ruch obrotowy masy stałej.

$$M_h = \sum_{i=1}^2 M_{hi} = J_h \frac{d^2 \alpha_h}{dt^2} = M_{h1} + M_{h2} \quad (50)$$

$$J_h = \sum_{i=1}^8 J_{hi} \quad (51)$$

gdzie:

M_h - to suma momentów sił działających w płaszczyźnie poziomej,

J_h - to suma momentów bezwładności względem osi pionowej.

Aby określić momenty sił działających na belkę i powodujących jej obrót wokół osi pionowej, rozważmy sytuację przedstawioną na rysunku 4.

$M_{h1} = F_h(\omega_t) l_t \cos \alpha_v$ – moment sił napędowych przyłożonych do belki,

$M_{h2} = -\Omega_h k_h$ – moment tarcia zależny od prędkości kątowej belki wokół osi pionowej,

ω_t - to prędkość obrotowa wirnika ogonowego,

$F_h(\omega_t)$ - oznacza zależność siły napędowej od prędkości kątowej wirnika ogonowego (należy określić eksperymentalnie),

k_h - to stała.

[Tekst alternatywny. Rysunek 4 przedstawia model podwójnego wirnika (Twin Rotor) w płaszczyźnie poziomej (widok z góry) w układzie współrzędnych (X, Z). Model ten umożliwia analizę ruchu obrotowego wokół osi pionowej oraz oddziaływania sił aerodynamicznych generowanych przez wirniki.

Elementy rysunku:

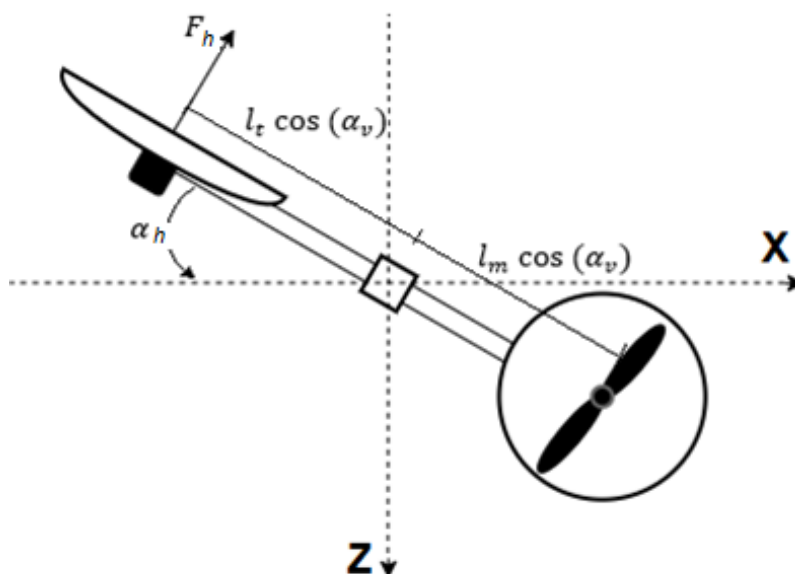
Wirniki – zainstalowane na przeciwległych końcach ramienia:

Wirnik główny (prawy) – generuje siłę nośną i moment wokół osi ramienia.

Wirnik pomocniczy (lewy) – wpływa na kontrolę kierunku.

Długości ramion $l_t \cos \alpha_v$ i $l_m \cos \alpha_v$ – wpływają na rozkład momentów i sił w układzie.

W płaszczyźnie poziomej model ten pozwala na analizę wpływu momentów generowanych przez wirniki oraz ich wzajemnej interakcji. Zmiana prędkości obrotowej wirników DC powoduje zmianę momentu sił, co umożliwia sterowanie obrotem całego układu wokół osi pionowej.]



Rys. 4. Model podwójnego wirnika – płaszczyzna pozioma (widok z góry).

Zgodnie z rysunkiem 4 możemy określić składniki momentu bezwładności względem osi pionowej (zależy od pozycji kąta pochylenia belki).



$$J_{h1} = \frac{m_m}{3} (l_m \cos \alpha_v)^2 \quad (52)$$

$$J_{h2} = \frac{m_t}{3} (l_t \cos \alpha_v)^2 \quad (53)$$

$$J_{h3} = \frac{m_b}{3} (l_b \sin \alpha_v)^2 \quad (54)$$

$$J_{h4} = m_{tr} (l_t \cos \alpha_v)^2 \quad (55)$$

$$J_{h5} = m_{mr} (l_m \cos \alpha_v)^2 \quad (56)$$

$$J_{h6} = m_{cb} (l_{cb} \sin \alpha_v)^2 \quad (57)$$

$$J_{h7} = \frac{m_{ts}}{2} r_{ts}^2 + m_{ts} (l_t \cos \alpha_v)^2 \quad (58)$$

$$J_{h8} = m_{ms} r_{ms}^2 + m_{ms} (l_m \cos \alpha_v)^2 \quad (59)$$

Lub w formie zwartej:

$$J_h = D \sin^2 \alpha_v + E \cos^2 \alpha_v + F \quad (60)$$

gdzie: D, E, F to stałe:

$$D = m_{cb} l_{cb}^2 + m_b \frac{l_b^2}{3} \quad (61)$$

$$E = \left(m_{mr} + m_{ms} + \frac{m_m}{3} \right) l_m^2 + \left(m_{ts} + m_{tr} + \frac{m_t}{3} \right) l_t^2 \quad (62)$$

$$F = m_{ms} r_{ms}^2 + \frac{m_{ts}}{2} r_{ts}^2 \quad (63)$$

Używając równań (40)-(63) możemy zapisać równania opisujące ruch systemu w następujący sposób:

$$\frac{dS_v}{dt} = (l_m F_v(\omega_m) - \Omega_v k_v + g((A - B) \cos \alpha_v - C \sin \alpha_v) \quad (64)$$

$$- \left(\frac{1}{2} \right) \Omega_h^2 (A + B + C) \sin 2\alpha_v) / J_v$$

$$\frac{dS_h}{dt} = (F_h(\omega_t) l_t \cos \alpha_v - \Omega_h k_h) / J_h \quad (65)$$

$$\frac{d\alpha_v}{dt} = \Omega_v, \quad \Omega_v = S_v + \frac{J_{mr} \omega_m}{J_v} \quad (66)$$





$$\frac{d\alpha_h}{dt} = \Omega_h, \Omega_h = S_h + \frac{J_{tr}\omega_t \cos\alpha_v}{J_h} \quad (67)$$

gdzie:

J_{tr} - moment bezwładności w układzie silnik DC - wirnik ogonowy,

J_{mr} - moment bezwładności w układzie silnik DC - wirnik główny,

S_v - moment pędu w płaszczyźnie pionowej dla belki,

S_h - moment pędu w płaszczyźnie poziomej dla belki.

Dodatkowe człony w równaniach (66) i (67) wynikają z zasady zachowania momentu pędu.

Należy zauważyć, że prędkości kątowe są nieliniowymi funkcjami napięcia wejściowego silnika DC. W związku z tym mamy dwa dodatkowe równania:

$$\frac{du_{vv}}{dt} = \frac{1}{T_{mr}}(-u_{vv} + u_v), \omega_m = P_v(u_{vv}) \quad (68)$$

$$\frac{du_{hh}}{dt} = \frac{1}{T_{tr}}(-u_{hh} + u_h), \omega_t = P_h(u_{hh}) \quad (69)$$

gdzie:

T_{mr} - stała czasowa układu silnik główny - wirnik,

T_{tr} - stała czasowa układu silnik ogonowy - wirnik.

Powyższy model dynamiki silnika-wirnika uzyskuje się przez zastąpienie nieliniowego systemu szeregowym połączeniem liniowego układu dynamicznego i statycznej nieliniowości

Model Twin Rotor MIMO System (TRMS) jest dynamicznym układem sterowanym z dwoma stopniami swobody, przypominającym zachowanie śmigłowca. Układ składa się z dwóch wirników – głównego i ogonowego – które sterują ruchem pionowym oraz obrotem wokół osi pionowej.

Prezentowany skrypt w MATLAB implementuje model dynamiczny TRMS, uwzględniając momenty bezwładności, tłumienie, wpływ sił aerodynamicznych oraz grawitacji. Równania ruchu opisują zależności między momentami sił generowanymi przez wirniki a zmianami kątów pochylenia i odchylenia.

Regulacja układu opiera się na zastosowaniu regulatorów PID, które sterują napięciami podawanymi na silniki wirników. Wartości zadane dla kątów zmieniają się w czasie, co pozwala na symulację reakcji systemu na różne trajektorie sterowania.





Do rozwiązania równań różniczkowych opisujących dynamikę układu zastosowano funkcję ode45, a wyniki symulacji obejmują wykresy przedstawiające kąty, prędkości kątowe oraz siły sterujące wirników. Model umożliwia analizę wpływu parametrów regulatora oraz dynamiki układu na jego stabilność i dokładność śledzenia trajektorii.

```
clc; clear; close all;

% Definicja parametrów modelu
J_tr=0.1; % Moment bezwładności pierwszego wirnika [kg*m^2]
J_mr=0.1; % Moment bezwładności drugiego wirnika [kg*m^2]
l1 = 0.2; % Długość ramienia pierwszego wirnika [m]
l2 = 0.15; % Długość ramienia drugiego wirnika [m]
g = 9.81; % Przyspieszenie ziemskie [m/s^2]

% Definicje parametrów dynamicznych
lm = 0.2; lt = 0.25; J_v = 0.15; % Zaktualizowane wartości parametrów
T_v = 0.1; T_h = 0.1; % Stałe czasowe silników
kv = 0.1; kh = 0.1; % Współczynnik tłumienia dla Sv i Sh
mts = 0.2; mtr = 0.1; mt = 0.3; % Masowe parametry układu
lt = 0.25; % Długość ramienia
tm = 0.2; % Długość ramienia wirnika
mmr = 0.15; mms = 0.1; mm = 0.25; lm= 0.24; m_ms= 0.225; m_ts= 0.165;
m_cb = 0.05; m_b = 0.1; l_cb = 0.05; l_b = 0.1;
m_sr = 0.05; m_s = 0.07; r_ms = 0.02; r_ts = 0.015;

A = (mts + mtr + mt/2) * lt;
B = (mmr + mms + mm/2) * lm;
C = (m_cb * l_cb + m_b * l_cb/2);
D = m_cb * l_cb^2 + m_b * (l_b^2)/3;
E = (mmr + mms + mm/3) * lm^2 + (mts + mtr + mt/3) * lt^2;
F = m_ms * r_ms^2 + m_ts/2 * r_ts^2;
J_v = (mmr + mm / 3 + mms) * lm^2 + (mtr + mt / 3 + mts) * lt^2 + ...
      m_cb * l_cb^2 + m_b * (l_b^2) / 3 + mts * r_ts^2 + mms / 2 * r_ms^2;

% Czas symulacji
tspan = [0 3];

% Warunki początkowe [kąt1, prędkość1, kąt2, prędkość2, Sv, Sh, u_v, u_h]
x0 = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0]; % Dodajemy początkowe wartości napięć

% Parametry regulatora PID
Kp1 = 3; Ki1 = 1; Kd1 = 1;
Kp2 = 3; Ki2 = 2; Kd2 = 1;
% Symulacja układu przy użyciu ODE45
[t, x] = ode45(@(t, x) twin_rotor_dynamics(t, x, Kp1, Ki1, Kd1, Kp2, Ki2, Kd2, g,
A, B, C, D, E, F, lm, kv, kh, lt, J_v, T_v, T_h, J_tr, J_mr), tspan, x0);

% Tworzymy pustą tablicę dla sygnałów zadanych
```





```

alfa_d = zeros(length(t), 2); % Tablica dla alfa1_d i alfa2_d

% Dynamiczne wartości zadane
for i = 1:length(t)
    if t(i) <= 1.5
        alfa_d(i, 1) = 0.1; % alfa1_d przed 1.5s
        alfa_d(i, 2) = 0.2; % alfa2_d przed 1.5s
    else
        alfa_d(i, 1) = 0.15; % alfa1_d po 1.5s
        alfa_d(i, 2) = 0.25; % alfa2_d po 1.5s
    end
end

% Wykresy
figure;
plot(t, x(:,1), t, x(:,3)), title('\alpha_v, \alpha_h');
hold on;
plot(t, alfa_d(:,1), '--r'); % Sygnał zadany dla \alpha_v
plot(t, alfa_d(:,2), '--g'); % Sygnał zadany dla \alpha_h
legend('\alpha_v', '\alpha_h', '\alpha_v zadany', '\alpha_h zadany');
xlabel('t [s]');
ylabel('\alpha [rad]');
grid on;
saveas(gcf, 'sterowanie_pid_twin_rotor.bmp');
hold off;

figure;
plot(t, x(:,2), t, x(:,4)), title('$\dot{\alpha}_v, \dot{\alpha}_h$',
'Interpreter', 'latex');
legend('$\dot{\alpha}_v$', '$\dot{\alpha}_h$', 'Interpreter', 'latex');
xlabel('$t$ [s]', 'Interpreter', 'latex');
ylabel('$\dot{\alpha}$ [rad/s]', 'Interpreter', 'latex');
grid on;
saveas(gcf, 'predkosc_pid_twin_rotor.bmp');

figure;
plot(t, x(:,5), t, x(:,6)); % S_v i S_h
legend('S_v', 'S_h');
xlabel('Czas [s]'); ylabel('S_v, S_h');
title('Ewolucja S_v i S_h');
saveas(gcf, 'ewolucja_sv_sh.bmp');

function dxdt = twin_rotor_dynamics(t, x, Kp1, Ki1, Kd1, Kp2, Ki2, Kd2, g, A, B,
C, D, E, F, lm, kv, kh, lt, J_v, T_v, T_h, J_tr, J_mr)
    persistent integral_error1 integral_error2 prev_error1 prev_error2
    if isempty(integral_error1)
        integral_error1 = 0; integral_error2 = 0;
        prev_error1 = 0; prev_error2 = 0;
    end
end

```



```

% Dynamiczne wartości zadane
if t <= 1.5
    alfa1_d = 0.1; % Kąt zadany do 1.5s
    alfa2_d = 0.2;
else
    alfa1_d = 0.15; % Kąt zadany po 1.5s
    alfa2_d = 0.25;
end

alfa1 = x(1);
omega1 = x(2); % omega v
alfa2 = x(3);
omega2 = x(4); % omega h
Sv = x(5);
Sh = x(6);
u_v = x(7); % napięcie dla silnika głównego
u_h = x(8); % napięcie dla silnika ogonowego

error1 = alfa1_d - alfa1;
error2 = alfa2_d - alfa2;

integral_error1 = integral_error1 + error1 * 0.00001;
integral_error2 = integral_error2 + error2 * 0.00001;

derivative_error1 = (error1 - prev_error1) / 0.00001;
derivative_error2 = (error2 - prev_error2) / 0.00001;

u1 = Kp1 * error1 + Ki1 * integral_error1 + Kd1 * derivative_error1;
u2 = Kp2 * error2 + Ki2 * integral_error2 + Kd2 * derivative_error2;

prev_error1 = error1;
prev_error2 = error2;

% Równania dodatkowe
omegam=(90.99*u_v^6+599.73*u_v^5-129.26*u_v^4-
1238.64*u_v^3+63.45*u_v^2+1283.41*u_v);
omegat=(2020*u_h^5-194.69*u_h^4-4283.15*u_h^3+262.27*u_h^2+3796.83*u_h);
Fv=-3.48*10^(-12)*omegam^5+1.09*10^(-9)*omegam^4+4.123*10^(-6)*omegam^3-
1.632*10^(-4)*omegam^2+9.544*10^(-2)*omegam;
Fh=-3*10^(-14)*omegat^5-1.595*10^(-11)*omegat^4+2.511*10^(-7)*omegat^3-
1.808*10^(-4)*omegat^2+0.0801*omegat;
J_h=D*sin(alfa1)^2 + E * cos(alfa1)^2 + F;
% Równania dynamiki
du_v_dt = (u1 - u_v) / T_v;
du_h_dt = (u2 - u_h) / T_h;
dSv_dt = (lm * Fv - omega1 * kv + g * ((A - B) * cos(alfa1) - C * sin(alfa1))
- 0.5 * omega2^2 * ((A + B + C) * sin(2*alfa1)))/J_v;
dSh_dt = ((Fh * lt * cos(alfa1)) - omega2 * kh)/(J_h);
domega1_dt = Sv+J_mr*omegam/J_v;
domega2_dt = Sh+(J_tr*omegat*cos(alfa1)) / (J_h);

```





```
dxdt = [omega1; domega1_dt; omega2; domega2_dt; dSv_dt; dSh_dt; du_v_dt;  
du_h_dt];  
end
```

Wykres 5 przedstawia zmiany kątów nachylenia układu w czasie i wartości zadane. Linie ciągłe reprezentują rzeczywiste kąty wirników, natomiast linie przerywane oznaczają sygnały zadane, które układ powinien śledzić.

Analizując wykres, można ocenić jakość regulacji – im mniejsze odchylenie kątów rzeczywistych od zadanych, tym lepiej dostrojony jest regulator PID. Widoczne oscylacje mogą wskazywać na niedostateczne tłumienie układu, a opóźnienie w osiąganiu wartości zadanych może sugerować konieczność korekty nastaw regulatorów: K_{p1} , K_{i1} , K_{d1} , K_{p2} , K_{i2} , K_{d2} .

[Tekst alternatywny. Wykres 5 ilustruje zarówno wartości rzeczywiste kątów, jak i ich wartości zadane.

Elementy wykresu:

Oś pozioma ($t[s]$) – przedstawia czas w sekundach.

Oś pionowa ($\alpha[rad]$) – przedstawia wartości kątów nachylenia w radianach.

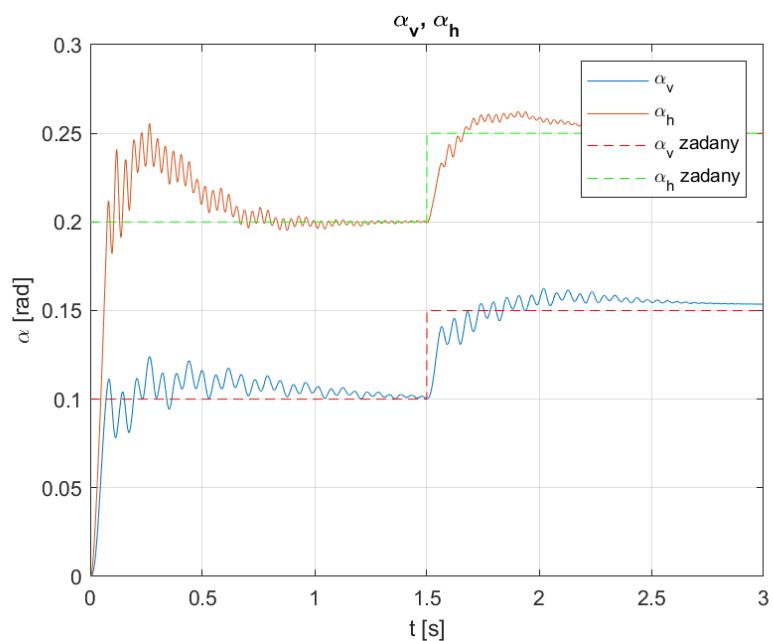
Krzywa niebieska (α_v) – rzeczywista trajektoria kąta pionowego.

Krzywa pomarańczowa (α_h) – rzeczywista trajektoria kąta poziomego.

Linia przerywana czerwona (α_v zadany) – zadana wartość kąta pionowego.

Linia przerywana zielona (α_h zadany) – zadana wartość kąta poziomego.

Na początku obserwujemy gwałtowny wzrost wartości obu kątów, co wynika z początkowej reakcji układu na sterowanie. Po początkowym przeregulowaniu następuje stabilizacja wartości rzeczywistych wokół wartości zadanych. W momencie około 1,5 sekundy następuje skokowa zmiana wartości zadanych, na co układ reaguje z pewnym opóźnieniem i oscylacjami przed osiągnięciem nowego punktu pracy. Widoczne są niewielkie oscylacje wokół wartości zadanych, co wskazuje na dynamiczne właściwości układu oraz działanie regulatorów. Odpowiedź układu podwójnego wirnika pokazuje typowe zachowanie systemów o dużej inercji i sprzężonych dynamicznie stopniach swobody.]



Rys. 5. Odpowiedź układu – Twin rotor.



5. Literatura

1. Szacka, K. (1999). Teoria układów dynamicznych. Warszawa: Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej.
2. Osowski S. (1999) Modelowanie układów dynamicznych z zastosowaniem języka Simulink. WNT, Warszawa.
3. Twin Rotor MIMO System – ADVANCED TEACHING MANUAL 1, Feedback Part No. 1160–330074M5, Feedback Instruments Ltd, Park Road, Crowborough, E. Sussex, TN6 2QR, UK.

