



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



Politechnika Świętokrzyska
Wydział Elektrotechniki Automatyki i Informatyki

Kierunek studiów:
Elektrotechnika

Katarzyna Rutczyńska-Wdowiak

Materiały dydaktyczne do przedmiotu

PODSTAWY AUTOMATYKI

opracowane w ramach realizacji Projektu
**„Dostosowanie kształcenia
w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb
współczesnej gospodarki”**
FERS.01.05-IP.08-0234/23

Kielce, 2025



Politechnika Świętokrzyska
Kielce University of Technology

Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki”
nr FERS.01.05-IP.08-0234/23



Spis treści

1. Przestrzeń stanu	2
1.1. Zapis transmitancji bez zer w przestrzeni stanów	4
1.2. Zapis transmitancji z zerami w przestrzeni stanów	6
2. Algebraiczne kryterium badania stabilności	7
3. Przykłady zapisu transmitancji w przestrzeni stanów i analiza stabilności	7
4. Literatura	26



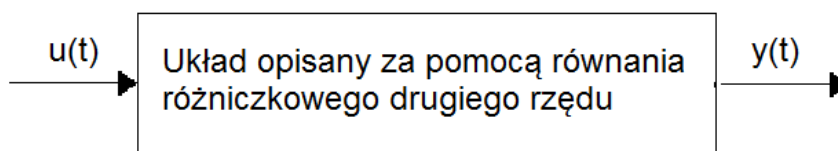
Materiały dydaktyczne objęte licencją Creative Commons BY 4.0.

Licencja dostępna pod adresem: <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

1. Przestrzeń stanów

Dany jest układ opisany równaniem różniczkowym drugiego rzędu, co pokazano na rysunku 1.

[Tekst alternatywny. Schemat blokowy przedstawia układ dynamiczny opisany równaniem różniczkowym drugiego rzędu. Do układu wchodzi sygnał wejściowy oznaczony jako $u(t)$, a z wyjścia układu wychodzi sygnał wyjściowy oznaczony jako $y(t)$. Wewnątrz bloku znajduje się napis: "Układ opisany za pomocą równania różniczkowego drugiego rzędu".]



Rys.1. Schemat blokowy układu dynamicznego opisanego równaniem różniczkowym drugiego rzędu z oznaczeniem sygnałów wejściowego i wyjściowego.

Dynamikę układu można zapisać w postaci równań stanu. Polega to na zastąpieniu równania różniczkowego drugiego rzędu układem równań różniczkowych pierwszego rzędu. W tym celu wprowadza się pomocnicze zmienne zdefiniowane następująco:

$$x_1(t) = y(t) \quad (1)$$

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t)$$

Po zróżniczkowaniu stronami tych równań otrzymano:

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = -a_0 y(t) - a_1 \dot{y}(t) + u(t) \quad (2)$$

Równania zapisane w postaci wektorowo-macierzowej:

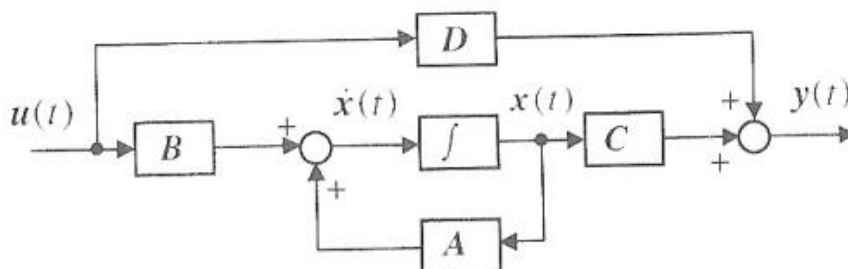
$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (3)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Równanie (3) nazywane jest **równaniem stanu**, natomiast równanie (4) nazywane jest **równaniem wyjścia**.

Reasumując można powiedzieć, że równania stanu reprezentują dynamikę systemu i są one równaniami różniczkowymi pierwszego rzędu.

[Tekst alternatywny. Schemat blokowy przedstawia standardową strukturę opisu układu dynamicznego w postaci stanu. Sygnał wejściowy $u(t)$ przechodzi przez blok B , a następnie jest sumowany z sygnałem z wyjścia bloku A . Wynik sumowania trafia do bloku całkującego, którego wyjście to $x(t)$. Sygnał $x(t)$ przechodzi przez blok C , a potem jest dodawany do sygnału z bloku D , przez który bezpośrednio przechodzi wejście $u(t)$. Wynikiem sumowania jest sygnał wyjściowy $y(t)$. Dodatkowo, sygnał z wyjścia całkowania trafia do bloku A , który daje sprzężenie zwrotne do wejścia sumatora.]



Rys. 2. Schemat blokowy układu opisanego równaniami stanu [4]

Na rysunku 2 przedstawiono schemat blokowy układu, który odpowiada równaniom stanu.

Równania stanu można zapisać także w postaci ogólnej:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (5)$$

$$y(t) = \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t) \quad (6)$$

gdzie:

- $x(t)$ - wektor stanu,
- $\mathbf{A}$ - macierz stanu,
- $\mathbf{B}$ - macierz wejść (sterowań),
- $\mathbf{C}$ - macierz wyjść,



D - macierz transmisyjna (bezpośredniego oddziaływania wejścia na wyjście)- występuje opcjonalnie.

W takiej postaci równanie (5) to **równanie stanu**, natomiast równanie (6) to **równanie wyjścia**.

Równania stanu układu są układem n - równań różniczkowych pierwszego rzędu, ogólnie nieliniowych i niestacjonarnych. Równania stanu uzupełniają równania wyjścia, które są równaniami algebraicznymi. Pokazują, więc w jaki sposób wektor zmiennych stanu i sterowanie oddziałują na wyjście układu.

Można wymienić zalety stosowania w automatyce opisu układu w przestrzeni stanów:

- przedstawienie zjawisk dynamicznych w układzie,
- sterowanie nie tylko wyjściem, ale też wielkościami fizycznymi, które określają stan wewnętrzny układu,
- dogodne warunki realizacji obliczeń numerycznych;

1.1. Zapis transmitancji bez zer w przestrzeni stanów

Dana jest transmitancja operatorowa $G(s)$ bez zer należy przedstawić taki układ w przestrzeni stanów.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^n + \dots + a_1 s + a_0} \quad (7)$$

Transmitancji odpowiada równanie różniczkowe o postaci:

$$y^n(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) \quad (8)$$

Wprowadzamy zmienne fazowe:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) \\ &\dots \end{aligned} \quad (9)$$



$$x_n(t) = y^{n-1}(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t)$$

.....

$$\begin{aligned}\dot{x}_n(t) = y^n(t) &= b_0 u(t) - a_0 y(t) - a_1 \dot{y}(t) + \dots - a_{n-1} y^{n-1}(t) = \\ &= b_0 u(t) - a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) + \dots - a_{n-1} x_n(t)\end{aligned}$$

Równania stanu w postaci ogólnej:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (10)$$

$$y(t) = \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t) \quad (11)$$

Równania zapisane w postaci wektorowo-macierzowej:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ b_0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (16)$$



1.2. Zapis transmitancji z zerami w przestrzeni stanów

Dana jest transmitancja operatorowa $G(s)$ z zerami należy przedstawić taki układ w przestrzeni stanów.

$$G(s) = \frac{b_ms^m + \dots + b_1s + b_0}{s^n + \dots + a_1s + a_0} \quad (17)$$

Należy zapisać transmitancję $G(s)$ w postaci iloczynu dwóch transmitancji:

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) \quad (18)$$

gdzie:

$$G_1(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + \dots + a_1s + a_0} \quad (19)$$

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = b_ms^m + \dots + b_1s + b_0 \quad (20)$$

Wyboru zmiennych stanu dokonuje się podobnie jak w przypadku transmitancji bez zer.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t) \\ x_2(t) &= \dot{x}(t) \\ &\dots\dots\dots \\ x_n(t) &= x^{n-1}(t) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (22)$$



$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{C} = [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad 0] \quad (24)$$

2. Algebraiczne kryterium badania stabilności

Stabilność jest podstawową własnością, którą musi spełniać każdy zastosowany w praktyce układ.

Układ regulacji jest stabilny, gdy wielkość wyjściowa jako odpowiedź na dowolne ograniczone wymuszenie będzie ograniczona.

Algebraiczne kryteria stabilności pozwalają ocenić stabilność układu tylko na podstawie równania charakterystycznego tego układu. Można w ten sposób określić, czy układ jest stabilny, na granicy stabilności, czy niestabilny. Stosowanie tych kryteriów jest bardzo proste i w zasadzie wymaga niewielkiej wiedzy z zakresu automatyki.

Warunek konieczny, ale niewystarczający stabilności asymptotycznej:

Równanie charakterystyczne układu ma współczynniki jednego znaku i niezerowe.

Warunki dostateczne sformułowane zostały przez Hurwita:

1. Wszystkie współczynniki równania charakterystycznego a_i muszą być większe od zera, czyli: $a_i > 0$;
2. Wszystkie wyznaczniki Hurwita muszą być większe od zera $\Delta_i > 0$;

Wyznacznik Hurwita:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & \dots \end{vmatrix} \quad (25)$$

3. Przykłady zapisu transmitancji w przestrzeni stanów i analiza stabilności

Zadanie 1

Dana jest transmitancja operatorowa $G(s)$ przedstawić układ w przestrzeni stanów i zbadać stabilność.



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{5}{s^2 + 2s + 3}$$

Korzystamy z definicji transmitancji operatorowej:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Po jednej stronie zapisujemy definicję, a po drugiej transmitancję układu:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{5}{s^2 + 2s + 3}$$

korzystając z proporcji:

$$Y(s)(s^2 + 2s + 3) = 5U(s)$$

wymnażamy:

$$Y(s)s^2 + 2Y(s)s + 3Y(s) = 5U(s)$$

przechodzimy na równanie różniczkowe:

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 3y(t) = 5u(t)$$

wyprowadzamy z równania różniczkowego najwyższą pochodną:

$$\ddot{y}(t) = -2\dot{y}(t) - 3y(t) + 5u(t)$$

Wprowadzamy zmienne stanu -składowe wektora stanu $\mathbf{x}(t)$: $x_1(t)$, $x_2(t)$.

Zmienne stanu są składowymi wektora stanu $\mathbf{x}(t)$, czyli:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

W przypadku transmitancji bez zer:

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t)$$



$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = -2\dot{y}(t) - 3y(t) + 5u(t) = -2x_2 - 3x_1 + 5u(t)$$

Równania stanu w postaci ogólnej:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t)$$

$$y(t) = \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t)$$

Równania zapisane w postaci wektorowo-macierzowej:

a) równanie stanu:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} u(t)$$

b) równanie wyjścia:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Określenie stabilności układu korzystając z kryterium Hurwitza:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{5}{s^2 + 2s + 3} = \frac{L(s)}{M(s)}$$

gdzie:

$L(s)$ – licznik transmitancji operatorowej,

$M(s)$ – mianownik transmitancji operatorowej.

Równanie charakterystyczne układu:

$$M(s) = 0 \\ s^2 + 2s + 3 = 0$$

1. Sprawdzenie pierwszego warunku Hurwitza: $a_2=1$, $a_1=2$, $a_0=3$ – warunek jest spełniony, bo wszystkie współczynniki równania są większe od zera.
2. Sprawdzenie drugiego warunku Hurwitza:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 \end{vmatrix}$$

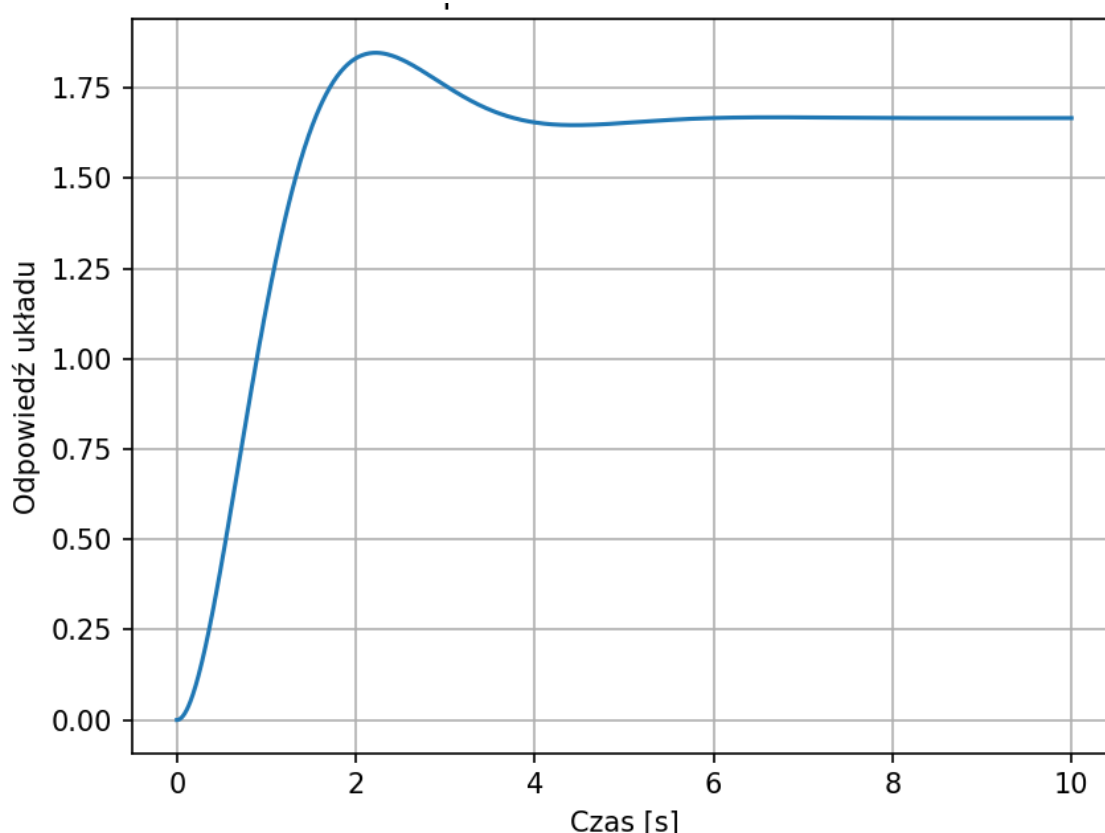
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

$$\Delta_1 = |a_1| = |2| = 2$$

Wyznaczniki są większe od zera, a więc warunek jest spełniony.

Wniosek-układ jest stabilny asymptotycznie.

[Tekst alternatywny. Wykres przedstawia odpowiedź układu dynamicznego w funkcji czasu. Oś pozioma oznaczona jest jako "Czas [s]" i obejmuje zakres od 0 do 10 sekund. Oś pionowa jest podpisana jako "Odpowiedź układu" i obejmuje wartości od 0 do około 1.8. Krzywa układu najpierw rośnie, osiągając maksimum w okolicach 1.8, po czym opada i stopniowo stabilizuje się na poziomie około 1.65.]



Rys. 3. Przebieg odpowiedzi czasowej układu.



Zadanie 2

Dana jest transmitancja operatorowa $G(s)$ przedstawić układ w przestrzeni stanów i zbadać stabilność.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 4s}$$

Korzystamy z definicji transmitancji operatorowej:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Po jednej stronie zapisujemy definicję, a po drugiej transmitancję układu:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 4s}$$

korzystając z proporcji:

$$Y(s)(s^2 + 4s) = U(s)$$

wymnażamy:

$$Y(s)s^2 + 4Y(s)s = U(s)$$

przechodzimy na równanie różniczkowe:

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) = u(t)$$

wyprowadzamy z równania różniczkowego najwyższą pochodną:

$$\ddot{y}(t) = -4\dot{y}(t) + u(t)$$

Wprowadzamy zmienne stanu -składowe wektora stanu $\mathbf{x}(t)$: $x_1(t)$, $x_2(t)$.

Zmienne stanu są składowymi wektora stanu $\mathbf{x}(t)$, czyli:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$



W przypadku transmitancji bez zer:

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = -4\dot{y}(t) + u(t) = -4x_2 + u(t)$$

Równania stanu w postaci ogólnej:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t)$$

$$y(t) = \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t)$$

Równania zapisane w postaci wektorowo-macierzowej:

c) równanie stanu:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

d) równanie wyjścia:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Określenie stabilności układu korzystając z kryterium Hurwitza:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 4s} = \frac{L(s)}{M(s)}$$

gdzie:

$L(s)$ – licznik transmitancji operatorowej,

$M(s)$ – mianownik transmitancji operatorowej.

Równanie charakterystyczne układu:

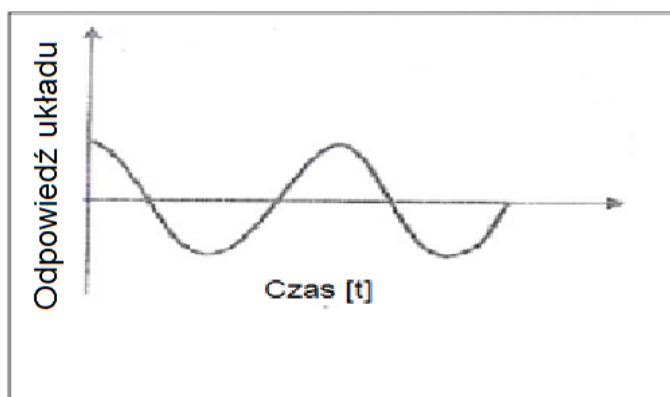
$$\begin{aligned} M(s) &= 0 \\ s^2 + 4s &= 0 \end{aligned}$$

3. Sprawdzenie pierwszego warunku Hurwitza: $a_2=1$, $a_1=4$, $a_0=0$ – warunek jest niespełniony.

Jest to przypadek szczególny, ponieważ $a_0=0$.

Wniosek-układ jest na granicy stabilności.

[Tekst alternatywny. Wykres przedstawia przebieg odpowiedzi układu dynamicznego w funkcji czasu. Oś pozioma jest opisana jako "Czas [t]", a oś pionowa jako "Odpowiedź układu". Charakterystyka układu ma kształt sinusoidalny — początkowo maleje, następnie wzrasta, po czym znowu maleje, wskazując na oscylacyjny charakter przebiegu, który przechodzi wielokrotnie przez oś czasu.]



Rys. 4. Przykład przebiegu odpowiedzi czasowej układu.

Zadanie 3

Dana jest transmitancja operatorowa $G(s)$ przedstawić układ w przestrzeni stanów i zbadać stabilność.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 - 2s + 3}$$

Korzystamy z definicji transmitancji operatorowej:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Po jednej stronie zapisujemy definicję, a po drugiej transmitancję układu:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 - 2s + 3}$$

korzystając z proporcji:



$$Y(s)(s^2 - 2s + 3) = U(s)$$

wymnażamy:

$$Y(s)s^2 - 2Y(s)s + 3Y(s) = U(s)$$

przechodzimy na równanie różniczkowe:

$$\ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) + 3y(t) = u(t)$$

wyprowadzamy z równania różniczkowego najwyższą pochodną:

$$\ddot{y}(t) = 2\dot{y}(t) - 3y(t) + u(t)$$

Wprowadzamy zmienne stanu -składowe wektora stanu $\mathbf{x}(t)$: $x_1(t)$, $x_2(t)$.
Zmienne stanu są składowymi wektora stanu $\mathbf{x}(t)$, czyli:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

W przypadku transmitancji bez zer:

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = 2\dot{y}(t) - 3y(t) + u(t) = 2x_2 - 3x_1 + u(t)$$

Równania stanu w postaci ogólnej:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t)$$

Równania zapisane w postaci wektorowo-macierzowej:

e) równanie stanu:



$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

f) równanie wyjścia:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Określenie stabilności układu korzystając z kryterium Hurwitza:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 - 2s + 3} = \frac{L(s)}{M(s)}$$

gdzie:

$L(s)$ – licznik transmitancji operatorowej,

$M(s)$ – mianownik transmitancji operatorowej.

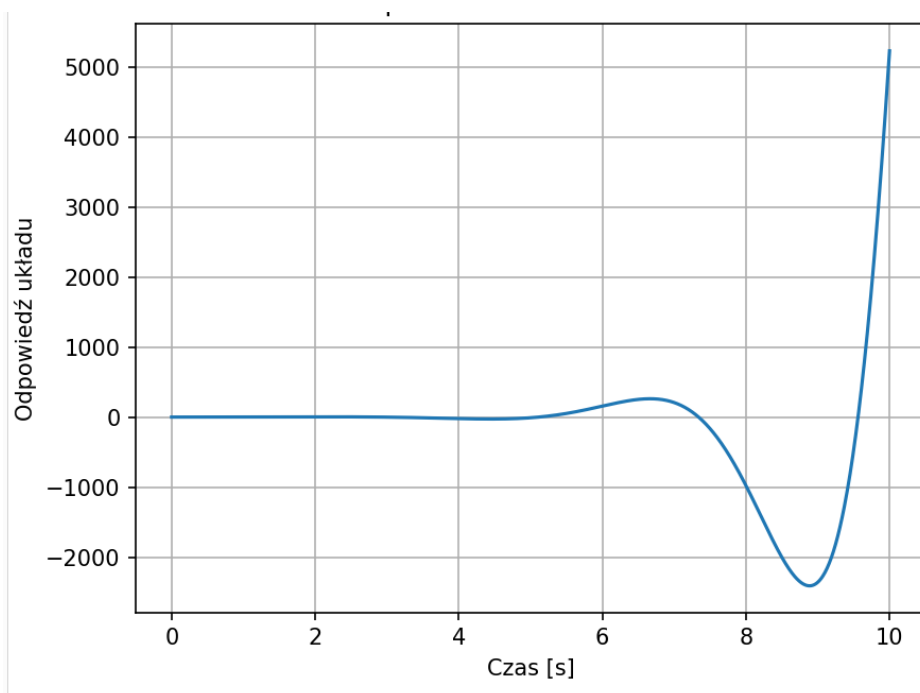
Równanie charakterystyczne układu:

$$\begin{aligned} M(s) &= 0 \\ s^2 - 2s + 3 &= 0 \end{aligned}$$

4. Sprawdzenie pierwszego warunku Hurwitza: $a_2=1$, $a_1=-2$, $a_0=3$ – warunek jest niespełniony, bo współczynnik a_1 równania jest mniejszy od zera.

Wniosek-układ jest niestabilny.

[Tekst alternatywny. Wykres przedstawia odpowiedź układu dynamicznego w funkcji czasu, gdzie oś pozioma oznaczona jest jako "Czas [s]" (zakres od 0 do 10), a oś pionowa jako "Odpowiedź układu". Linia przedstawiająca odpowiedź zaczyna się w pobliżu zera, przez kilka sekund pozostaje bliska zera, następnie gwałtownie narasta, osiągając duże wartości dodatnie i ujemne (od około -2000 do ponad 5000), wskazując na niestabilność układu.]



Rys. 5. Przebieg odpowiedzi czasowej układu.

Zadanie 4

Dana jest transmitancja operatorowa $G(s)$ przedstawić układ w przestrzeni stanów i zbadać stabilność.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 5s + 10}{s^2 + 3s + 6}$$

Zapisujemy transmitancję $G(s)$ jako iloczyn transmitancji:

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)$$



oraz:

(1)

$$G_1(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 6}$$

(2)

$$G_2(s) = s^2 + 5s + 10$$

Z 1)

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 6}$$

Korzystamy z proporcji:

$$X(s)(s^2 + 3s + 6) = U(s)$$

Wymnażamy stronami:

$$X(s)s^2 + 3X(s)s + 6X(s) = U(s)$$

Przechodzimy na równanie różniczkowe:

$$\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 6x(t) = u(t)$$

Wyprowadzamy najwyższą pochodną:

$$\ddot{x}(t) = -3\dot{x}(t) - 6x(t) + u(t)$$

Wprowadzamy zmienne stanu -składowe wektora stanu $\mathbf{x}(t)$: $x_1(t)$, $x_2(t)$.

Zmienne stanu są składowymi wektora stanu $\mathbf{x}(t)$, czyli:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

W przypadku transmitancji z zerami:



$$\begin{aligned}x_1(t) &= x(t) \\x_2(t) &= \dot{x}_1(t) = \dot{x}(t)\end{aligned}$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{x}(t) = -3\dot{x}(t) - 6x(t) + u(t) = -3x_2(t) - 6x_1(t) + u(t)$$

Równania stanu w postaci ogólnej:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t)$$

$$y(t) = \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t)$$

Równania zapisane w postaci wektorowo-macierzowej:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Z 2)

$$G_2(s) = s^2 + 5s + 10$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = s^2 + 5s + 10$$

$$Y(s) = X(s)(s^2 + 5s + 10)$$

Wymnażamy:

$$Y(s) = X(s)s^2 + 5X(s)s + 10X(s)$$

Przechodzimy na równanie różniczkowe:

$$y(t) = \ddot{x}(t) + 5\dot{x}(t) + 10x(t)$$

Podstawiamy za $\ddot{x}(t)$ do równania $y(t)$:

$$y(t) = 2x_2(t) + 4x_1(t) + u(t)$$

Równanie wyjścia w postaci wektorowo-macierzowej:



$$y(t) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + u(t)$$

Określenie stabilności układu korzystając z kryterium Hurwitza:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 5s + 10}{s^2 + 3s + 6} = \frac{L(s)}{M(s)}$$

Równanie charakterystyczne układu:

$$M(s) = 0$$

$$s^2 + 3s + 6 = 0$$

1. Sprawdzenie pierwszego warunku Hurwitza: $a_2=1$, $a_1=3$, $a_0=6$ – warunek jest spełniony, bo wszystkie współczynniki równania są większe od zera.
2. Sprawdzenie drugiego warunku Hurwitza:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 18$$

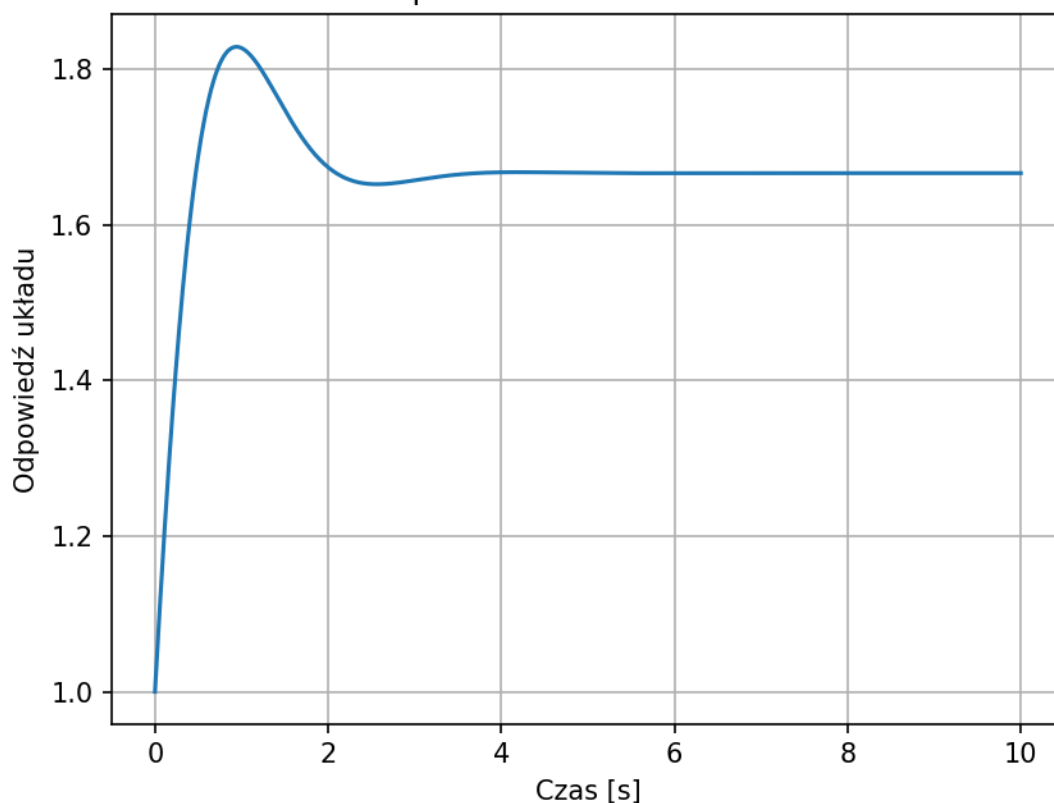
$$\Delta_1 = |a_1| = |3| = 3$$

Wyznaczniki są większe od zera, a więc warunek jest spełniony.

Wniosek-układ jest stabilny asymptotycznie.

Na rysunku 6 pokazano przebieg odpowiedzi czasowej układu.

[Tekst alternatywny. Wykres przedstawia odpowiedź układu dynamicznego na osi czasu. Oś pozioma jest opisana jako "Czas [s]" (zakres 0–10), a oś pionowa jako "Odpowiedź układu" (zakres od 1.0 do około 1.85). Przebieg odpowiedzi rozpoczyna się od wartości 1.0, rośnie do maksimum powyżej 1.8, po czym maleje i stabilizuje się na stałym poziomie około 1.67.]



Rys. 6. Przebieg odpowiedzi czasowej układu.

Zadanie 5

Dana jest transmitancja operatorowa $G(s)$ przedstawić układ w przestrzeni stanów i zbadać stabilność.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 3s + 5}{s^2 - 2s + 1}$$

Zapisujemy transmitancję $G(s)$ jako iloczyn transmitancji:

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)$$

oraz:

(1)

$$G_1(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 - 2s + 1}$$



(2)

$$G_2(s) = s^2 + 3s + 5$$

Z 1)

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 - 2s + 1}$$

Korzystamy z proporcji:

$$X(s)(s^2 - 2s + 1) = U(s)$$

Wymnażamy stronami:

$$X(s)s^2 - 2X(s)s + X(s) = U(s)$$

Przechodzimy na równanie różniczkowe:

$$\ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t) + x(t) = u(t)$$

Wyprowadzamy najwyższą pochodną:

$$\ddot{x}(t) = 2\dot{x}(t) - x(t) + u(t)$$

Wprowadzamy zmienne stanu -składowe wektora stanu $\mathbf{x}(t)$: $x_1(t)$, $x_2(t)$.Zmienne stanu są składowymi wektora stanu $\mathbf{x}(t)$, czyli:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

W przypadku transmitancji z zerami:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t) \\ x_2(t) &= \dot{x}_1(t) = \dot{x}(t) \end{aligned}$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{x}(t) = 2\dot{x}(t) - x(t) + u(t) = 2x_2(t) - x_1(t) + u(t)$$



Równania stanu w postaci ogólnej:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t)$$

$$y(t) = \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t)$$

Równania zapisane w postaci wektorowo-macierzowej:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Z 2)

$$G_2(s) = s^2 + 3s + 5$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = s^2 + 3s + 5$$

$$Y(s) = X(s)(s^2 + 3s + 5)$$

Wymnażamy:

$$Y(s) = X(s)s^2 + 3X(s)s + 5X(s)$$

Przechodzimy na równanie różniczkowe:

$$y(t) = \ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 5x(t)$$

Podstawiamy za $\ddot{x}(t)$ do równania $y(t)$:

$$\ddot{x}(t) = 2\dot{x}(t) - x(t) + u(t)$$

$$y(t) = 5x_2(t) + 4x_1(t) + u(t)$$

Równanie wyjścia w postaci wektorowo-macierzowej:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + u(t)$$



Określenie stabilności układu korzystając z kryterium Hurwitza:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 3s + 5}{s^2 - 2s + 1} = \frac{L(s)}{M(s)}$$

Równanie charakterystyczne układu:

$$M(s) = 0$$

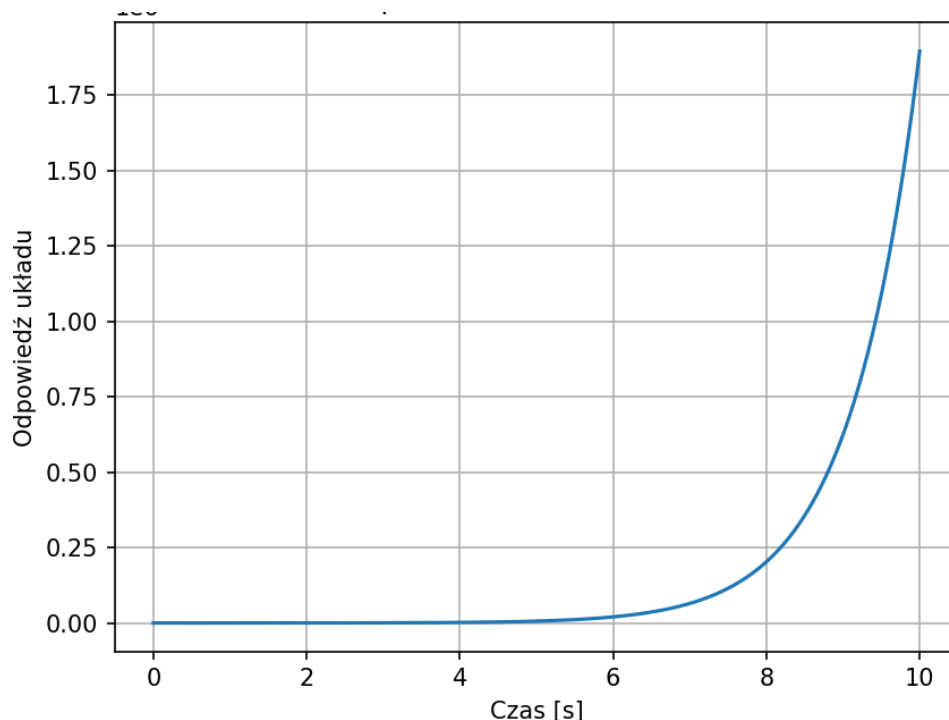
$$s^2 - 2s + 1 = 0$$

1. Sprawdzenie pierwszego warunku Hurwitza: $a_2=1$, $a_1=-2$, $a_0=1$ – warunek jest niespełniony.

Wniosek-układ jest niestabilny.

Na rysunku 7 pokazano przebieg odpowiedzi czasowej układu.

[Tekst alternatywny. Wykres przedstawia odpowiedź układu dynamicznego w funkcji czasu. Oś pozioma przedstawia "Czas [s]" w zakresie od 0 do 10, natomiast oś pionowa to "Odpowiedź układu" w zakresie od 0 do około 1.8. Linia wykresu rozpoczyna się od zera, przez pierwsze sekundy pozostaje na niskim poziomie, a następnie gwałtownie wzrasta, osiągając najwyższą wartość przy końcu obserwowanego przedziału, co wskazuje na charakter niestabilny układu.]



Rys. 7. Przebieg odpowiedzi czasowej układu.

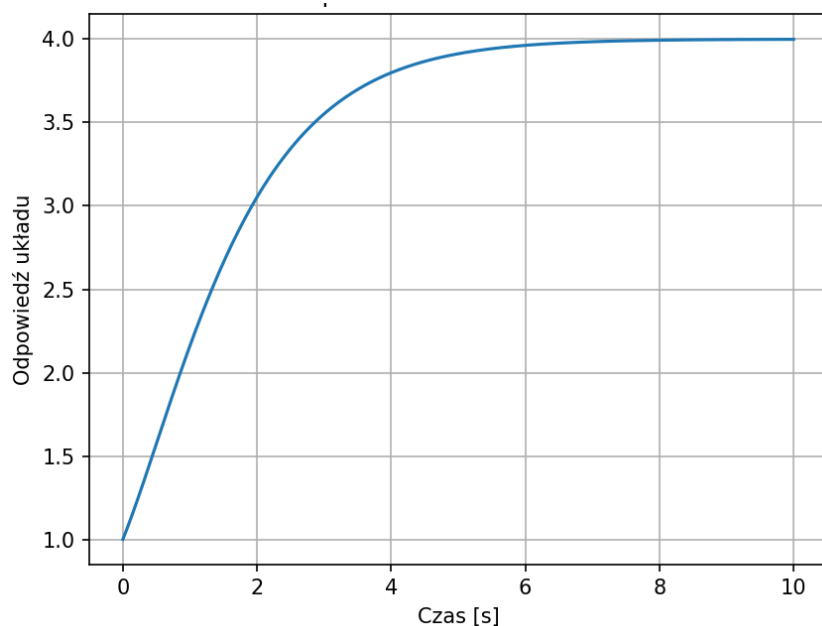
Na rysunkach 8-9 pokazano przykładowe odpowiedzi układu dla następujących równań stanu:

a)

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + u(t)$$

[Tekst alternatywny. Wykres przedstawia odpowiedź układu dynamicznego na osi czasu. Oś pozioma jest opisana jako "Czas [s]" (zakres od 0 do 10), a oś pionowa jako "Odpowiedź układu" (zakres od 1 do 4). Przebieg odpowiedzi zaczyna się od wartości 1, rośnie niemal wykładniczo, a następnie stabilizuje się w okolicach wartości 4 w dalszej części wykresu.]



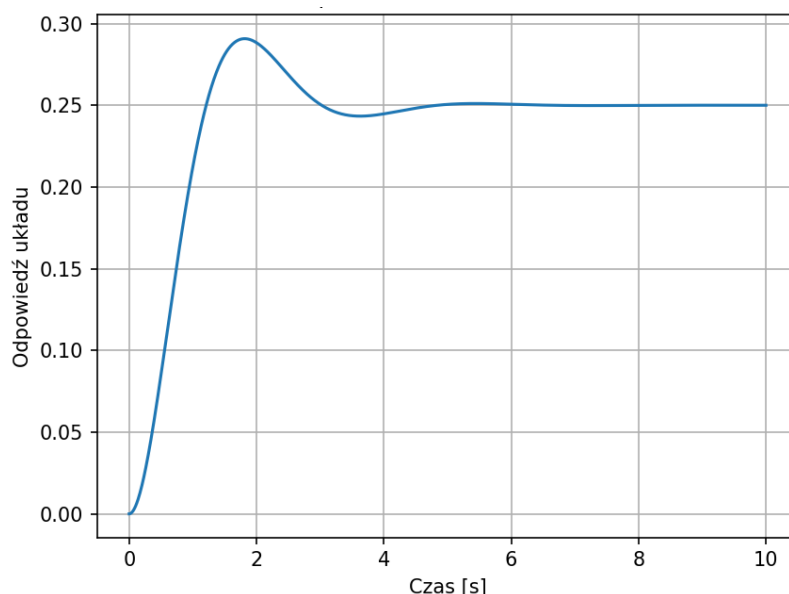
Rys. 8. Przebieg odpowiedzi czasowej układu.

b)

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + u(t)$$

[Tekst alternatywny. Wykres przedstawia odpowiedź układu dynamicznego w funkcji czasu. Oś pozioma jest opisana jako "Czas [s]" i obejmuje zakres od 0 do 10, a oś pionowa jako "Odpowiedź układu" w zakresie od 0 do 0.3. Linia wykresu startuje od zera, rośnie do maksimum około 0.29, następnie maleje i stabilizuje się w pobliżu wartości 0.25.]



Rys. 9. Przebieg odpowiedzi czasowej układu.

4. Literatura

1. Kaczorek T. (1993). Teoria sterowania i systemów. Tom 1. PWN. Warszawa.
2. Kaczorek T. (1977). Teoria sterowania. Tom 1. PWN. Warszawa.
3. Stefański T. (2005). Teoria sterowania. Układy liniowe. Materiały pomocnicze do wykładów i ćwiczeń z teorii sterowania dla studiów zaocznych. Skrypt PŚk. Kielce.