Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Politechnika Świętokrzyska
Wydział Zarządzania i Modelowania Komputerowego

Kierunek studiów:
Inżynieria danych

Katarzyna Brzozowska-Rup

Materiały dydaktyczne do przedmiotu

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

opracowane w ramach realizacji Projektu
„**Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki**”
FERS.01.05-IP.08-0234/23

Kielce, 2025

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego | Rzeczpospolita Polska | Dofinansowane przez Unię Europejską

Spis treści

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology

Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki” nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

1. Wstęp

Rachunek prawdopodobieństwa jest jednym z działów matematyki zajmującym się teorią dotyczącą zdarzeń/zjawisk losowych. Stanowi podstawę dla metod modelowania niepewności oraz analizy rozkładów prawdopodobieństwa. Celem przedmiotu jest formalizacja pojęcia przypadku i opracowanie narzędzi umożliwiających ilościowy opis procesów stochastycznych. W ramach tego przedmiotu zostaną omówione fundamentalne pojęcia, takie jak przestrzeń probabilistyczna, zdarzenia losowe, prawdopodobieństwo klasyczne, geometryczne i warunkowe, a także niezależność zdarzeń. Kluczowym elementem będzie również omówienie najważniejszych twierdzeń, w tym twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym, twierdzenia Bayesa. Rachunek prawdopodobieństwa ma szerokie zastosowanie w wielu dziedzinach nauki i praktyki, takich jak statystyka, informatyka, ekonomia, fizyka, biologia czy analiza ryzyka. Ideą przedmiotu jest przygotowanie studenta do bardziej zaawansowanych metod statystycznych. W trakcie zajęć szczególny nacisk zostanie położony na rozwój umiejętności analitycznego myślenia oraz praktycznego wykorzystania arkusza kalkulacyjnego MS Excel do rozwiązywania problemów teoretycznych i praktycznych. Zawartość merytoryczna tego opracowania jest zgodna z treściami zawartymi w programie kształcenia na kierunku Inżynieria danych.

2. Elementy kombinatoryki

2.1. Schematy kombinatoryczne

Kombinatoryka zajmuje się wypracowaniem technik wyznaczania liczebności konkretnych zbiorów zdarzeń elementarnych, możliwych grupowań i zestawień jakie można tworzyć z dowolnego zbioru skończonego.
W kombinatoryce wyróżnia się dwa sposoby przedstawiania wyników losowania:

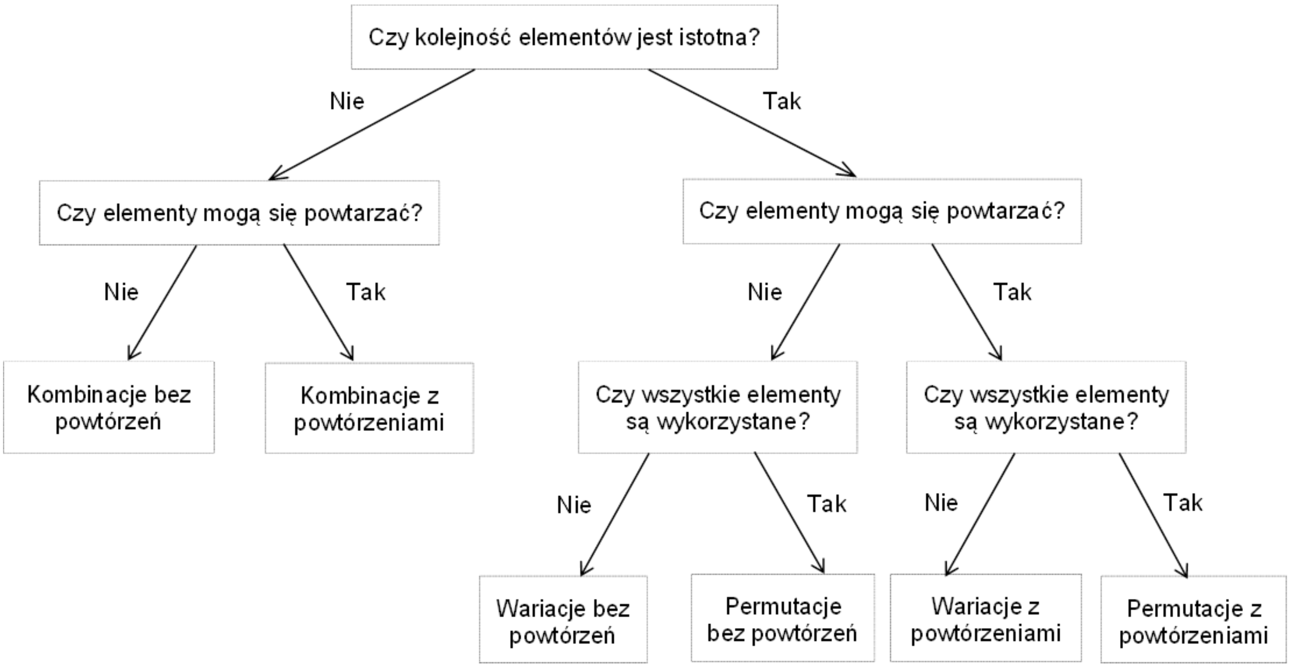
a) losowanie, w którym jest istotna kolejność wylosowanych elementów (ciągi),
b) losowanie, w którym nie jest istotna kolejność wylosowanych elementów, a jedynie ich liczebność (zbiory).

Zarówno w przypadku a) jak w przypadku b) możemy rozróżnić losowania, w których:

i) elementy nie powtarzają się w doświadczeniu,
ii) dopuszcza się powtarzanie elementów w doświadczeniu.

Pomocniczy schemat właściwego sposobu wyboru i uporządkowania elementów przedstawiono na rys. 1.

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki” nr FERS.01.05-IP.08-0234/23



Rys. 1. Podstawowy schemat postępowania w kombinatoryce.

W poniższych rozważaniach będziemy przyjmować, że A jest zbiorem n-elementowym.

Definicja
k- elementową kombinacją zbioru n-elementowego A $(k \leq n)$ nazywamy każdy k- elementowy podzbiór zbioru A (wybrany w dowolnej kolejności i bez zwracania).

Twierdzenie

Liczba wszystkich możliwych k-elementowych kombinacji zbioru n-elementowego wynosi

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \tag{1}$$

gdzie $n, k \in \boldsymbol{N}$ i $n \geq k$.

MS Excel: liczba kombinacji wyznaczana jest za pomocą funkcji:

$$\boldsymbol{KOMBINACJE}(\boldsymbol{liczba};\ \boldsymbol{liczba\_wybrana})$$

gdzie $liczba$ – oznacza łączną liczbę elementów; $liczba\_wybrana$ – liczba elementów w każdej kombinacji.

Przykład 2.1
Utworzyć dwuelementowe kombinacje zbioru $\{a, b, c\}$

Rozwiązanie. $C_3^2 = \binom{3}{2} = 3 \quad \{a, b\};\ \{a, c\};\ \{b, c\}$

Wzór dwumianowy Newtona

Dla dowolnych liczb $a, b \in R$ oraz dowolnej liczby $n \in N$ prawdziwy jest wzór

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \tag{2}$$

Zadanie 2.1
Wykazać, że (zastosuj wzór dwumianowy)
a) $\sum_{k=0}^{30}\binom{n}{k}$,
b) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},\ \ 0 \le k \le n$
c) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},\ \ 0 \le k \le n)$

Definicja
k-elementową kombinacją z powtórzeniami elementów zbioru A nazywamy k-elementowy multizbiór[1] złożony z elementów zbioru A.

[1] Multizbiór to rozszerzenie pojęcia zbioru, w którym każdy element może występować wiele razy.

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki” nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

Twierdzenie
Liczba możliwych k-elementowych kombinacji z powtórzeniami elementów zbioru n-elementowego wynosi

$$C_n^k = \binom{k+n-1}{k} \tag{3}$$

gdzie $n, k \in N \ i \ n < k$

MS Excel: liczba kombinacji z powtórzeniami wyznaczana jest za pomocą funkcji:

$$\boldsymbol{KOMBINACJE.A(liczba;\ liczba\_wybrana)}$$

Przykład 2.2
Jakie są możliwe wyniki rzutu trzema monetami?

Rozwiązanie
{R, R, R}, {R, R, O}, {R, O, O}, {O, O, O} – tzw. multizbiory
$C_4^3 = \binom{4}{3} = 4$

Definicja
Permutacją zbioru n-elementowego nazywamy każdy $\boldsymbol{n}$–wyrazowy różnowartościowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów tego zbioru.

Twierdzenie
Liczba różnych permutacji zbioru n-elementowego wynosi

$$P_n = V_n^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n! \tag{4}$$

gdzie $n \in N$

MS Excel: liczba permutacji bez powtórzeń wyznaczana jest za pomocą funkcji:

$$\boldsymbol{SILNIA(liczba)}$$

gdzie $liczba$ – liczba nieujemna, której silnia ma zostać obliczona

Przykład 2.3

Utworzyć permutacje zbioru {a, b, c}

Rozwiązanie

$P_3 = 3!$

(a, b, c); (a, c, b); (c, a, b); (c, b, a); (b, c, a)

Przykład 2.4

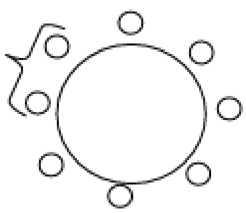
Na ile sposobów można posadzić dwie osoby (A i B) tak, aby były sąsiadami, jeśli razem z pozostałymi 8 osobami zajmują w dowolny sposób miejsca a) w rzędzie złożonym z 10 miejsc; b) przy okrągłym stole, gdzie ustawiono 10 nieponumerowanych krzeseł (Uwaga: rozmieszczenia uznajemy za różne, jeśli w rozmieszczeniach tych co najmniej jedna osoba ma różnych sąsiadów.)

Rozwiązanie

a) Jeśli A i B mają siedzieć obok siebie to mogą wybrać miejsce na 9 sposobów, ponieważ sąsiedzi mogą być różni, więc osoby A i B możemy posadzić na 2! sposobów (AB lub BA). Pozostałe osoby możemy posadzić na 8! sposobów.

Ostatecznie szukanych sposobów jest $9! \cdot 2! = 725760$

b) Osoba A zajmuje miejsce przy stole na 10 sposobów, obok niej siada osoba B – może zająć miejsce na dwa sposoby, podobnie jak wyżej mogą zamienić się miejscami stąd: $2 \cdot 2 \cdot 10$ sposobów. Pozostałe osoby siadają na 8! sposobów. Przy czym, ze względu na fakt, że stół jest okrągłe rozmieszczenie osób nie ulegnie zmianie, jeżeli np. każdą z osób przesadzimy o jedno krzesło (lub więcej, ale wszystkich o tyle samo) w tym samym kierunku (np. zgodnie z ruchem wskazówek zegara). W związku z powyższym należy uwzględnić możliwy obrót dzieląc przez 10.



Ostatecznie liczba szukanych sposobów wynosi

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 10 \cdot\ 8!}{10} = 161280$$

Zauważmy, że gdyby krzesła były ponumerowane liczba byłaby 10 razy większa.

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology

Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki” nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

Definicja
Permutacją z powtórzeniami odpowiednio $n_1, n_2, \ldots, n_k$-krotnymi kolejnych elementów zbioru A nazywamy uporządkowany ciąg n-wyrazowy wybrany z n-elementowego zbioru A, którego wyrazy powtarzają się odpowiednio $n_1, n_2, \ldots, n_k$ razy.

W tym działaniu kombinatorycznym kolejność elementów jest istotna oraz elementy powtarzają się z określoną częstotliwością.

Twierdzenie
Liczbę możliwych permutacji z powtórzeniami odpowiednio $n_1, n_2, \ldots, n_k$ - krotnymi kolejnych elementów zbioru obliczamy według wzoru

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!} \tag{5}$$

gdzie $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Przykład 2.5
Ile „słów" 5 literowych można utworzyć z liter {a, b, c} wiedząc, że litery: a i b mają powtórzyć się 2 razy, a litera c tylko raz.

Rozwiązanie
$$P_5^{1,2,2} = \frac{5!}{1!\, 2!\, 2!} = 30$$

Np.: $(c, a, a, b, b), (c, a, b, a, b), \ldots$

Definicja
k-wyrazową wariacją bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego $(k \le n)$ nazywamy każdy k-wyrazowy różnowartościowy ciąg wyrazów ze zbioru n-elementowego.

Twierdzenie
Liczba możliwych k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń elementów zbioru n-elementowego wynosi

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}_{k\ czynników} \tag{6}$$

gdzie $n, k \in N \ \ i \ \ n \ge k$.

W tym działaniu kombinatorycznym:

$$V_n^k = \binom{n}{k} k!$$

co oznacza, że

- liczba k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń równa jest liczbie kombinacji bez powtórzeń, w której elementy są rozróżnialne (tzn. ważna jest kolejność)
- wariacje n-elementowe bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego to permutacje bez powtórzeń

Przykład 2.6
Utworzyć dwuelementowe wariacje ze zbioru {a, b, c}

Rozwiązanie
(a, b); (a, c); (b, a); (b, c); (c, a); (c, b)

$V_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$

Przykład 2.7
a) Ile liczb czterocyfrowych można ułożyć z cyfr od 1 do 9 (przy czym liczby nie mogą się powtarzać). b) Jak zmieni się wynik, jeżeli będziemy mogli uwzględnić również „0"?

Rozwiązanie
Ad a) $V_9^4 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$
Ad b) $V_9^4 = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$
Uwzględnienie „0" spowoduje wzrost liczby możliwych liczb o 1512.

Definicja
k-wyrazową wariacją z powtórzeniami ze zbioru n-elementowego A nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg elementów wybranych ze zbioru A ze zwracaniem.

Twierdzenie
Liczba możliwych k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń elementów zbioru n-elementowego wynosi

$$V_n^k = n^k \tag{7}$$

gdzie $n, k \in N \;\; i \;\; n \geq k$.

UWAGA

- W **wariacjach z powtórzeniami** elementy zbioru mogą się powtarzać dowolną ilość razy;
- W **permutacjach z powtórzeniami** krotności każdego elementu są ściśle określone.

Przykład 2.8

Utworzyć dwuelementowe wariacje z powtórzeniami ze zbioru {a, b, c}

Rozwiązanie

$V_3^2 = 3^2$

(a, a); (b, b); (c, c); ((a, b); (a, c); (b, a); (b, c); (c, a); (c, b)

2.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania

2.1 Ile można utworzyć różnych haseł do logowania o długości 7 jeżeli muszą pojawić się w nim dokładnie 3 litery, 2 cyfry i 2 znaki specjalne. Zakłada się, że:

– do dyspozycji są 52 litery (wielkie i duże litery alfabetu łacińskiego), 10 cyfr oraz 9 znaków specjalnych,

– symbole nie mogą się powtarzać.

Jak zmieni się liczba haseł, gdy możliwe będą powtórzenia?

2.2 Ile różnych słów tej samej długości można utworzyć ze słowa PRAWDOPODOBIEŃSTWO?

2.3 Na ile sposobów można rozmieścić 20 kul nierozróżnialnych w trzech komórkach, tak aby w pierwszej było ich 10, w drugiej 6, a w trzeciej 4?

2.4 Dziewięciu studentów należy zakwaterować w 3 pokojach akademika: 2-, 3- i 4-osobowym. Na ile sposobów można ich rozmieścić?

2.5 Alfabet (kod) Morse'a, (wymyślony i opracowany w 1838 r.), wykorzystuje dwa typy sygnałów: krótkie oraz długie. Krótkie sygnały oznaczane są kropką, natomiast długie kreską. Kolejne litery alfabetu łacińskiego (ale też cyfry oraz znaki specjalne) są reprezentowane przez określone sekwencje kropek i kresek. Określ liczbę sygnałów o długości serii od jeden do cztery, które mogą zostać utworzone z kropek i kresek.

3. Zdarzenia losowe i prawdopodobieństwo

3.1. Uwagi wstępne

Rachunek prawdopodobieństwa zajmuje się zdarzeniami występującymi podczas przeprowadzania **doświadczeń losowych.**

Doświadczenie nazywamy losowym, jeżeli można je powtarzać wielokrotnie w identycznych warunkach, ale jego wyniku nie można jednoznacznie przewidzieć.

Przykładami doświadczeń losowych są: rzut monetą; rzut kostką do gry; gry hazardowe; losowanie Lotto; pomiar określonej wielkości fizycznej.

Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa:

- zdarzenie elementarne, przestrzeń zdarzeń elementarnych,
- zdarzenie losowe,
- prawdopodobieństwo zajścia określonego zdarzenia.

Warto zauważyć, że problematyka o charakterze probabilistycznym podejmowana była już w Starożytności (zagadnienia dotyczące gier hazardowych, jak również istota przypadkowości i konieczności podejmowana w rozważaniach filozoficznych). Jednak w większości opracowań, z zakresu historii matematyki, pierwsze teoretyczne podejście do problematyki probabilistycznej przypisuje się francuskim matematykom Blaise'owi Pascalowi oraz Pierre'owi de Fermat. Za datę narodzin rachunku prawdopodobieństwa przyjmuje się rok 1654, kiedy to pomiędzy Pascalem i Fermatem zawiązała się korespondencja dotycząca rozwiązań problemów wynikłych w związku z uprawianiem gier hazardowych. Osobom zainteresowanym polecam pozycje Łakoma (1989), Duda (2020) oraz literaturę w nich przywoływaną.

3.2. Zdarzenia losowe

W każdym doświadczeniu losowym (czy obserwacji) można wyodrębnić pewne najprostsze, nierozkładalne/niepodzielne (tzn. takie, że nie da się ich przedstawić w postaci sumy logicznej innych zdarzeń) wyniki - **zdarzenia elementarne**. Wyniki te wyróżniają się tym, że każde powtórzenie doświadczenia kończy się jednym i tylko jednym z nich. Pojęcie zdarzenia elementarnego w teorii prawdopodobieństwa jest pojęciem pierwotnym, czyli niedefiniowalnym**.** Dla każdego doświadczenia należy indywidualnie ustalić, co rozumie się przez to pojęcie i jakie są możliwe zdarzenia elementarne.

Zdarzenie elementarne oznaczamy literą ω, natomiast zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych danego doświadczenia losowego oznaczamy literą grecką Ω.

Ze względu na liczbę elementów przestrzenie zdarzeń elementarnych można podzielić na:

- skończone, przeliczalne,
- nieprzeliczalne.

Przykład 3.1

- **Przestrzeń skończona**
  Zdarzenia elementarne w doświadczeniu polegającym na:
  - ✓ rzucie monetą $\omega_1 = O;\ \omega_2 = R;\ \Omega = \{\mathrm{O}, \mathrm{R}\}$
  - ✓ rzucie kostką $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, gdzie ω_i oznacza wyrzucenie i-oczek.

- **Przestrzeń nieskończona**
  - ✓ rzut monetą aż do uzyskania orła $\Omega = \{O,\ RO,\ RRO,\ \dots\}$
    $\omega_i = \underbrace{RRR \dots O}_{1\,2\,3 \qquad i}$
  - ✓ spóźnienie w minutach na 45 minutowe zajęcia $\Omega = [0,\ 45]$.

Zdarzeniem losowym (w skrócie zdarzeniem) nazywamy każdy podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω. Zwykle zdarzenia oznaczamy wielkimi literami $A, B, \dots, Z$.

W szczególności zdarzeniami losowymi są zbiory:

- Ω jest zdarzeniem (tzw. zdarzenie pewne),
- $\emptyset$ - zbiór niezawierający żadnego zdarzenia elementarnego (zbiór pusty), nazywany zdarzeniem niemożliwym,
- Jeżeli A jest zdarzeniem, to $A' = \Omega \backslash A$ jest zdarzeniem (tzw. zdarzenie przeciwne),
- Jeżeli $A_1, A_2, \dots$ są zdarzeniami, to $A_1 \cup A_2 \cup \dots$ jest zdarzeniem.

Na zdarzeniach wykonujemy działania podobnie jak na zbiorach: suma, różnica, iloczyn.

Jeżeli $A \cap B = \emptyset$, to mówimy, że zdarzenia A i B wykluczają się.

Zbiór interesujących nas **zdarzeń losowych** będziemy oznaczać literą $\boldsymbol{\Sigma}$.
O zbiorze Σ, będącym zbiorem podzbiorów przestrzeni Ω zakładamy, że spełnia następujące warunki (jest tzw. rodziną podzbiorów zbioru Ω):

1. $\Omega \in \Sigma$,
2. $\mathrm{A} \in \Sigma \Rightarrow \mathrm{A}' \in \Sigma$,
3. $A_1, A_2, \dots, A_{n,} \dots \in \Sigma \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots \in \Sigma$.

Zauważmy, że **jeżeli zbiór zdarzeń elementarnych ma $\boldsymbol{n}$-elementów, to zdarzeń losowych jest $\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}$.**

Przykład 3.2
Doświadczenie polega na dwukrotnym rzucie monetą. Określić: zbiór zdarzeń elementarnych, podać liczbę wszystkich możliwych zdarzeń losowych oraz wypisać je (uwzględniając zdarzenie pewne, niemożliwe, jedno- i dwu- elementowe).

Przykładowe zdarzenia losowe:
$A_1 = \{(R, R)\}$ – w żadnym rzucie nie uzyskamy orła
$A_2 = \{(R, O); (R, R)\}$ – wyrzucenie reszki w pierwszym rzucie
$A_3 = \{(O, R); (R, O); (O, O)\}$ – wyrzucenie co najmniej jednego orła

3.3. Definicje prawdopodobieństw

Każdemu zdarzeniu chcemy przypisać liczbę określającą **prawdopodobieństwo** jego pojawienia się. Prawdopodobieństwo zdarzenia losowego może być określone na wiele sposobów.

Pierwszą (klasyczną) definicję prawdopodobieństwa podał P.S. Laplace w 1812 r.

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki” nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Jeśli:
zbiór zdarzeń elementarnych ma skończoną liczbę elementów (ich liczbę oznaczmy przez n) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, tj. , (tj. $\overline{\overline{\Omega}} = n$; $\overline{\overline{\Omega}}$ -moc zbioru Ω),
wszystkie zdarzenia losowe jednoelementowe $\{\omega_1\}, \dots, \{\omega_n\}$ są jednakowo prawdopodobne $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \dots = P(\{\omega_n\})$
to prawdopodobieństwo zdarzenia A składającego się z k zdarzeń elementarnych (tj. $\overline{\overline{A}} = k$; $\overline{\overline{A}}$ - moc zbioru A) można wyrazić wzorem

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} \tag{8}$$

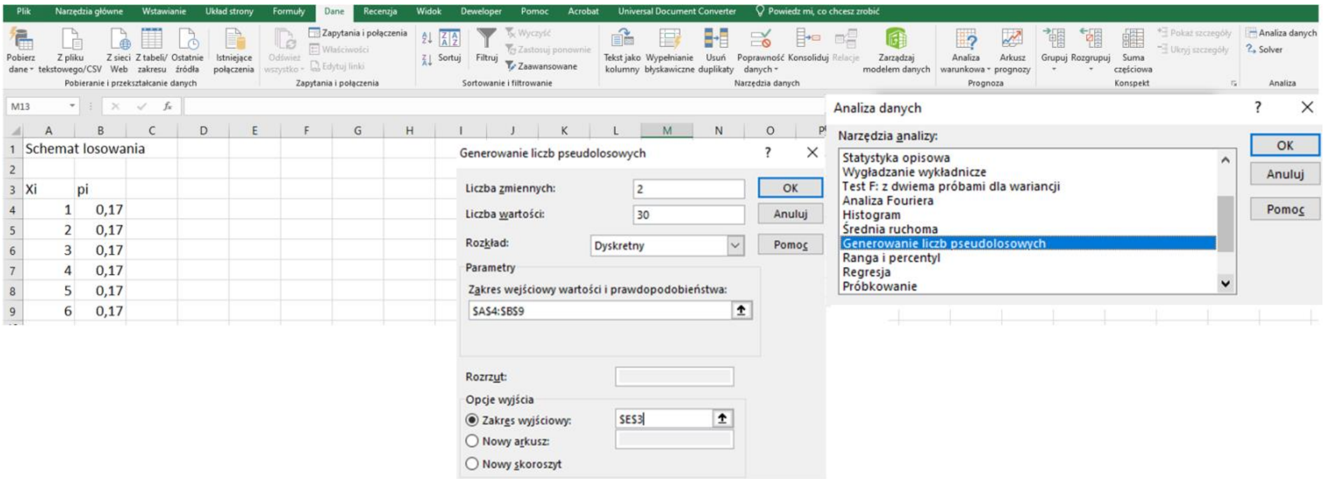
Zdarzenia elementarne, z których składa się zdarzenie A, nazywamy **zdarzeniami sprzyjającymi**.

Przykład 3.3
Rzucamy wielokrotnie dwoma kostkami do gry i zapisujemy sumę wyrzuconych oczek.

Zbiór zdarzeń elementarnych $\Omega = \{\omega_{ij} = (i, j);\ \ i, j \in \{1, 2, \dots, 6\}\}$
S_i – zdarzenie losowe, w którym suma oczek jest równa i;
$i \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

Przykładowy ciąg jaki możemy otrzymać w 30 rzutach:
6, 7, 7, 8, 2, 5, 7, 2, 8, 12, 4, 10, 5, 7, 7, 10, 6, 4, 9,7, 7, 7, 8, 6, 8, 7, 5, 7, 7, 9
Możemy zauważyć, że najczęstszymi wynikami jest „7”, „6” i „8”.

Aby wygenerować taki ciąg w arkuszu kalkulacyjnym MS Excel należy:
1) przygotować schemat losowania zgodnie, z którym będziemy generować ciąg (schemat losowania podany jest w komórkach od A4 do B9);
2) wykorzystać Generator liczb pseudolosowych dostępny w Analizie danych.



Rys. 2. Schemat generowania liczb pseudolosowych o zadanym rozkładzie prawdopodobieństwa w arkuszu MS Excel

Oprócz tych 11 zdarzeń mogą nas interesować także inne zdarzenia, np. zdarzenie A_1, w których suma oczek jest liczbą parzystą, lub zdarzenie A_2, w którym suma oczek nie jest równa ani 2, ani 12. Zauważmy, że zdarzenie A_1 może być wyrażone jako alternatywa zdarzeń $S_2, S_4, S_6, S_8, S_{10}, S_{12}$, natomiast zdarzenie A_2 jako negacja alternatywy zdarzeń S_2 z S_{12}.

Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa (A. Kołmogorow, 1933 rok)

Prawdopodobieństwem nazywamy funkcję rzeczywistą P, która każdemu zdarzeniu losowemu A przyporządkowuje liczbę z przedziału $[0,1]$

$$P: \Sigma \ni S \to P(S) \in [0\,,1] \qquad (9)$$

zgodnie z poniższymi warunkami

1) $P(\mathrm{A}) \geq 0$;
2) $P(\Omega) = 1$, (zdarzenie pewne realizuje się z prawdopodobieństwem 1);
3) dla każdego ciągu zdarzeń parami rozłącznych $A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$

$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$ (warunek addytywności)

Elementarne własności prawdopodobieństwa

1. $P(\emptyset) = 0$ (prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego wynosi zero);
2. $P(A') = P(\Omega \backslash A) = 1 - P(A)$ (prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego);
3. jeśli $A \subset B$, to $P(A) \leq P(B)$ (monotoniczność);
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,

   $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + \mathrm{P(C)} - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

Uwaga

Rozpatrując określoną sytuację, w której uwzględniamy losowość, wskazane jest, aby postępować według schematu, wyznaczając kolejno:
1) przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω;
2) zbiór wszystkich zdarzeń losowych $\mathbf{\Sigma}$**;**
3) funkcję prawdopodobieństwa P.

Trójkę $(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{P})$ nazywamy **przestrzenią probabilistyczną**.

cd. Przykładu 3.3
Rozwiązanie
Wyznaczmy prawdopodobieństwa każdego zdarzenia losowego $S_i \in \Sigma$.
W pierwszym kroku zauważmy, że zbiór zdarzeń elementarnych składa się z 36 elementów (moc zbioru wynosi 36). Przypadali, w których zachodzi każde ze zdarzeń S_i przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1. Rozkład możliwych wyników rzutu dwoma kostkami

Zdarzenie losowe	Sprzyjające zdarzenia elementarne	Prawdopodobieństwo
S_2	(1,1)	$\frac{1}{36}$ = 0,028
S_3	(1,2), (2,1)	0,056
S_4	(1,3), (2,2), (3,1)	0,083
S_5	(1,4), (2,3), (3,2); (4,1)	0,111
S_6	(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)	0,139
S_7	(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)	$\frac{6}{36}$ =0,167
S_8	(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)	0,139
S_9	(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)	0,111
S_{10}	(4,6), (5,5), (6,4)	0,083
S_{11}	(5,6), (6,5)	0,056
S_{12}	(6,6)	0,028

Możemy zauważyć, że zdarzenie S_7 ma szansę zajść 6 razy częściej niż zdarzenie S_2.

$$P(A_1) = P(S_2) + P(S_4) + P(S_6) + P(S_8) + P(S_{10}) + P(S_{12}) = 0{,}5$$

$$P(A_2) = 1 - \big(P(S_2) + P(S_{12})\big) = 0{,}944$$

Przykład 3.4 - dynamicznego LOSOWANIA ZE ZWRACANIEM

Spośród 5 kul niebieskich (n), 3 kul czerwonych (cz) oraz 2 kul zielonych (z), wybrano 6 kul. Podaj kilka możliwych wyników tego losowania, rozważając losowanie ze zwracaniem i bez zwracania.

trafione liczby	przybliżona wygrana
6 z 6	1 500 000 zł *
5 z 6	4 000 zł **
4 z 6	200 zł **
3 z 6	16 zł

* wygrana pierwszego stopnia jest zmienna i zależy od tego, ile osób zakupiło losy, czy poprzednio padła główna wygrana czy może nastąpiła kumulacja itp. 1,5 miliona złotych można przyjąć jako średnią wygraną przy założeniu braku kumulacji oraz przeciętnej liczby grających

** wygrane drugiego i trzeciego stopnia zależą zarówno od ilości osób, które kupiły losy oraz od ilości osób, które trafiły 4 z 6 liczb i 5 z 6 liczb, totalizator Sportowy dzieli pieniądze po równo pomiędzy wygranych 2 i 3 stopnia.

Rozwiązanie

Rozważmy schemat dynamicznego LOSOWANIA ZE ZWRACANIEM**:**
Będziemy wykorzystać następujące funkcje

- **LOS.ZAKR(dolna, górna)** – funkcja zwraca losową liczbę całkowitą z wybranego zakresu liczb;

- **ADRES()** – funkcja umożliwia uzyskanie adresu komórki w arkuszu, podając określony numer wiersza i kolumny (np. funkcja ADRES(1;3) zwraca adres C1;

- **ADR.POŚR()** - służy do pozyskania wartości z komórki, o zadanym adresie.

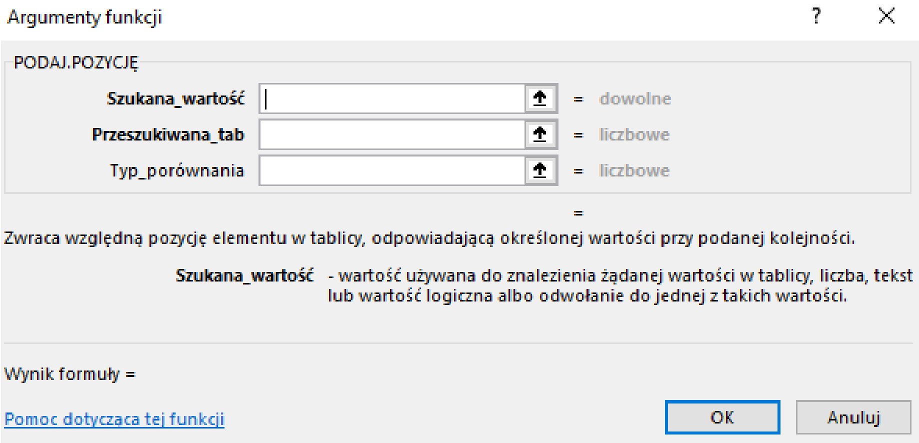
	A	B	C	D	E	F
1			zbiór wylosowany - LOSOWA			
2	1	n	=ADR.POŚR(ADRES(LOS.ZAKR(2;11);2))			
3	2	n	cz			
4	3	n	n			
5	4	n	cz			
6	5	n	cz			
7	6	cz	n			
8	7	cz				
9	8	cz				
10	9	z				
11	10	z				

Rys. 3 Zastosowanie funkcji Adres pośredni.

Przykład 3.5 - dynamiczne LOSOWANIE BEZ ZWRACANIA
Gra w Lotto. Duży lotek to zasadnicza, pierwsza gra oferowana przez Totalizator Sportowy. W kolekturze Totalizatora Sportowego gracz wybiera (typuje) 6 liczb spośród 49 (od 1 do 49). Wykorzystując generator liczb pseudolosowych wygenerować ciąg 6 elementowy (jako wynik Lotto). Sprawdzić wysokość swojej nagrody.

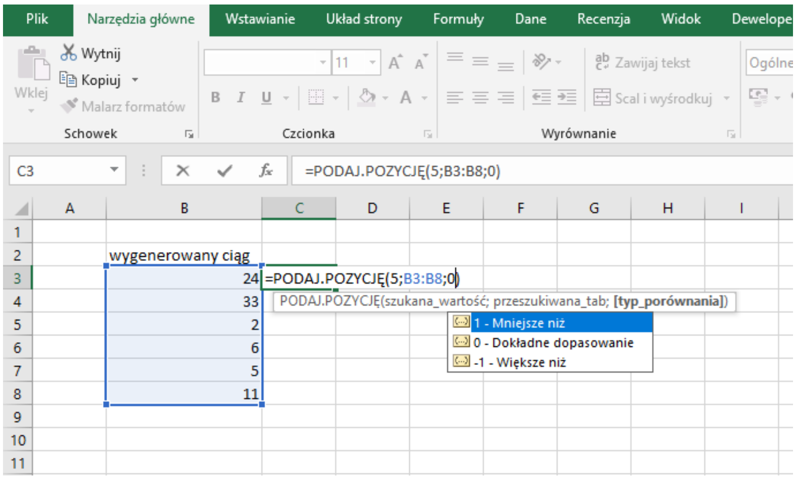
Rozwiązanie
Należy wykorzystać funkcje:

- **LOS()** – funkcja nie zawiera żadnych argumentów, zwraca wartość pseudolosową z przedziału (0, 1);
- **PODAJ.POZYCJĘ()** – zwraca informację w którym wierszu przeszukiwanej tabeli znajduje się szukana wartość.

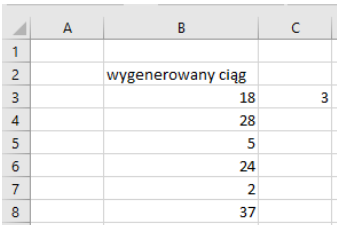


Rys. 4. Funkcja PODAJ.POZYCJĘ

Załóżmy, że mamy wygenerowany ciąg 6 liczb z przedziału od 1 do 49 i szukamy na której pozycji pojawiła się 5.



Wynik użycia funkcji PODAJ.POZYCJĘ

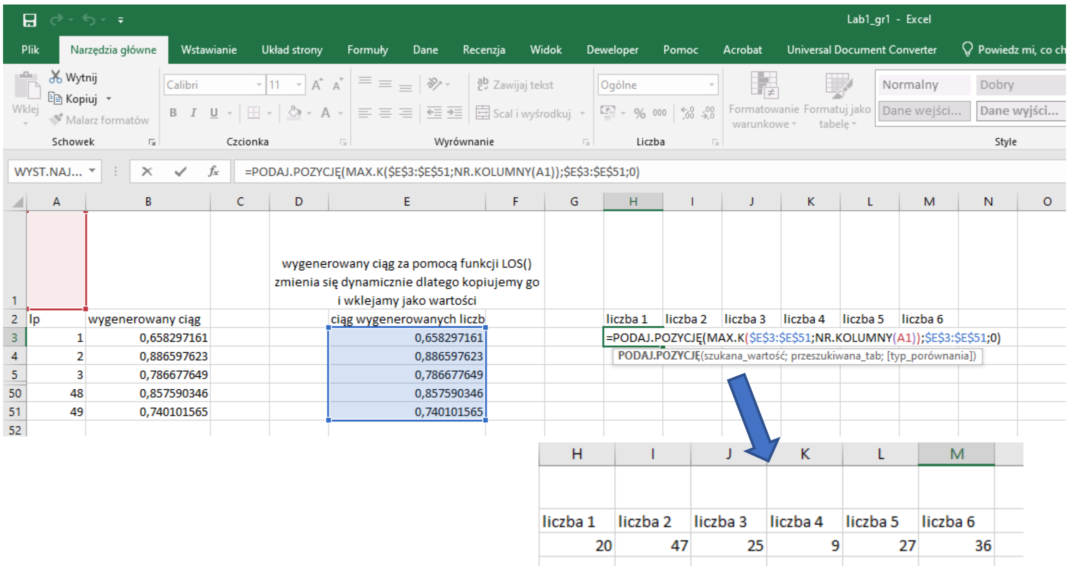


Rys. 5. Funkcja PODAJ.POZYCJĘ – uzupełnienie argumentów funkcji

- **Max.k(tablica,k) –** określa największą liczbę w podanej tablicy, przy czym argument k określa, która z kolei maksymalna liczba (licząc od największej) zostanie zwrócona jako wynik funkcji.
- **NR.KOLUMNY() -** zwraca numer kolumny danego odwołanie do komórki. Na przykład formuła =KOLUMNA(D10) zwraca wartość 4, ponieważ kolumna D jest czwartą kolumną.

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską

Rozwiązanie



Rys. 6. Wynik omawianego schematu

Zakładając, że przed przystąpieniem do generowania wyniku wytypowaliśmy następujące liczby: 25; 36; 4; 20; 27; 47 trafiliśmy 5 liczb z 6, więc możemy cieszyć się wygraną 😊

Powyższy schemat może być wykorzystany w procesie badania jakości, opartym na losowym wyborze np. elementów procesu produkcji czy dokumentów do kontroli.

Geometryczna definicja prawdopodobieństwa

Ta definicja wymaga znajomości miary zbiorów, umożliwia wyznaczanie prawdopodobieństwa w przypadku, gdy przestrzeń zdarzeń elementarnych jest nieskończona.

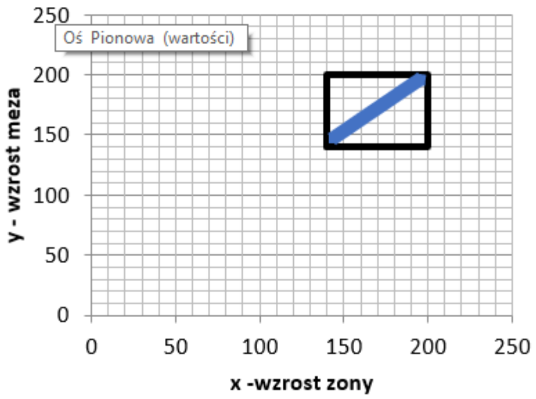
Niech $A \subset R^n$, oznaczmy przez $m(A)$ jego n-wymiarową miarę (długość dla $n = 1$, pole powierzchni dla $n = 2$, objętość dla $n = 3$, itp.), wówczas

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} \tag{10}$$

Politechnika Świętokrzyska
Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki” nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

Przykład 3.6
Zakłada się, że wzrost dorosłej osoby waha się w przedziale od 140 cm do 200 cm. Obliczyć prawdopodobieństwo, że różnica wzrostu między małżonkami nie przekroczy 15 cm. Zakładając, że x – wzrost żony, y – wzrost męża, przestrzenią zdarzeń elementarnych w tym przypadku jest kwadrat $\Omega = \{(x,y): 140 \leq x,y \leq 200\} = [140{,}200] \times [140{,}200]$.

Rozwiązanie



Rys. 7. Prezentacja graficzna zbioru zdarzeń elementarnych Ω oraz zbioru A zdarzeń sprzyjających (kolor niebieski)

Rozwiązanie
A - zdarzenie, które nas interesuje

$$A = \{(x,y): |x-y| \leq 15\}$$

Miarą $m(A)$ będzie pole obszaru A wyznaczone jako różnica między polem kwadratu Ω i dwóch identycznych trójkątów, tj.

$$m(A) = 60 \cdot 60 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 45 \cdot 45\right) = 1575$$

Stąd prawdopodobieństwo interesującego nas zdarzenia wynosi

$$P(A) = \frac{1575}{3600} = 0{,}438$$

Przy przyjętych założeniach w około 44% małżeństw różnica wzrostu między małżonkami nie przekracza 15 cm.
Jak zmieni się szukane prawdopodobieństwo, jeżeli założymy, że badana różnica nie powinna przekroczyć 5 cm.?

3.4. Prawdopodobieństwo warunkowe i niezależność zdarzeń

Niech A i B będą zdarzeniami losowymi określonymi na tej samej przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω, przy czym $P(B) > 0$, wówczas prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B określamy wzorem

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{11}$$

Z powyższego wzoru można wyznaczyć prawdopodobieństwo iloczynu (koniunkcji) dwóch zdarzeń $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$.
Dla $n = 3$ $P(A \cap B \cap C) = P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB)$, gdy $P(AB) > 0$

Prawdopodobieństwo koniunkcji n zdarzeń

Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$P(A_1A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \dots P(A_n|A_1A_2 \dots A_{n-1}) \tag{12}$$

gdy $P(A_1A_2 \dots A_{n-1}) > 0$

Przykład 3.7
Obliczyć prawdopodobieństwo wyrzucenia parzystej liczby oczek przy rzucie kością (zdarzenie A) pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B polegające na wyrzuceniu co najwyżej 5 oczek.

Rozwiązanie
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $A = \{2,4,6\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $A \cap B = \{2, 4\}$

$$P(A|B) = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{2}{5}$$

Przykład 3.8
Obliczyć prawdopodobieństwo, że losowo wybrany los loteryjny wygrywa największą stawkę, jeżeli wiadomo, że 25% losów przegrywa a 20% to losy wygrywające największą stawkę.

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki" nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

Rozwiązanie
Niech, A – zdarzenie: los wygrywa największą stawkę, B – zdarzenie: los przegrywa, $\bar{B}$ – zdarzenie przeciwne do zdarzenia B, tj. zdarzenie: los wygrywa
$P(\bar{B}) = 0{,}75$
Szukane prawdopodobieństwo
$P(A \cap \bar{B}) = P(A|\bar{B})P(\bar{B})$
$P(A \cap \bar{B}) = 0{,}2 \cdot 0{,}75 = 0{,}15$

Zdarzenia niezależne

Pojęcie niezależności (statystycznej) jest podstawowym pojęciem w rachunku prawdopodobieństwa.

Definicja
Zdarzenia A i B nazywamy niezależnymi, gdy

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{13}$$

Twierdzenie
Przy założeniu, że $P(A) > 0, P(B > 0)$ warunkiem koniecznym i wystarczającym niezależności A i B zdarzeń jest warunek

$$P(A|B) = P(A)$$

Oznacza to, że zdarzenie B nie ma wpływu na prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A.

Definicję niezależności można rozszerzyć na przypadek nieskończonego ciągu zdarzeń

Zdarzenia A_1, A_2, A_3 … są niezależne, jeżeli dla każdego $n \geq 2$ zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ są niezależne,
tzn. $P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$

Przykład 3.9
Doświadczenie polega na rzucie dwiema kostkami. Zbadać niezależność zdarzeń:
A – na drugiej kostce wypadła „6”, B – na pierwszej kostce wypadła liczba nieparzysta,
C – suma oczek na obu kostkach wynosi 10.

Rozwiązanie
$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2), \omega_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\},$ $\quad \bar{\bar{\Omega}} = 36$
$A = \{(1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (6,6)\},$ $\quad \bar{\bar{A}} = 6$

$B = \{(\omega_1, \omega_2), \omega_1 \in \{1,3,5\} \omega_2 \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$, $\quad \overline{\overline{B}} = 18$
$A \cap B = \{(1,6),(3,6),(5,6)\}$, $\quad \overline{\overline{A \cap B}} = 3$
Sprawdzamy warunek niezależności

$$P(A \cap B) = \frac{3}{36} = P(A)P(B) = \frac{6}{36} \cdot \frac{18}{36}$$

Wniosek: Zdarzenia A i B są niezależne.

3.5. Prawdopodobieństwo całkowite i twierdzenie Bayesa

Twierdzenie

Dana jest przestrzeń probabilistyczna (Ω, Σ, P) oraz zdarzenia $A_1, A_2, \dots, A_n \in \Sigma$ spełniające warunki (tzw. **układ zupełny**)

1) $P(A_i) > 0$, dla każdego $i = 1, \dots, n$,
2) $A_i \cap A_j = \emptyset$, dla wszystkich $i \neq j$
3) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$

wówczas dla dowolnego zdarzenia losowego $B \in \Sigma$ zachodzi wzór

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \dots P(B|A_n)P(A_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i) \end{aligned} \tag{14}$$

Przykład 3.10

W dwóch urnach są po trzy kule. W pierwszej są dwie białe i jedna czarna kula, w drugiej jedna biała i dwie czarne. Z urny pierwszej losujemy jedną kulę i przekładamy do drugiej urny. Z drugiej urny losujemy jedną kulę, Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie to kula biała?

B – wylosowanie z urny drugiej kuli białej; A_1 – do urny drugiej przełożono kulę białą; A_2 - do urny drugiej przełożono kulę czarną

Rozwiązanie

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) = \frac{1}{2}\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki” nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

Twierdzenie Bayesa

Jeżeli zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tworzą układ zupełny oraz $P(B) > 0$, to zachodzi następująca równość

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)} \tag{15}$$

dla każdego $k = 1, \ldots, n$

Przykład 3.11

Test na rzadką chorobę, która dotyka średnio 1 osobę na tysiąc, daje tzw. „fałszywą pozytywną odpowiedź" u 4% zdrowych, przy czym u chorych wynik pozytywny występuje zawsze. Jaka jest szansa, że osoba, u której test dał odpowiedź pozytywną, jest rzeczywiście chora? Założono, że u chorej osoby nie występują jakiekolwiek objawy choroby.

Rozwiązanie

Niech: B - zdarzenie oznacza pozytywną odpowiedź testu, A_1 – zdarzenie: osoba jest chora,

A_2 - zdarzenie: osoba jest zdrowa.

$P(A_1) = 0{,}001;\ P(B|A_1) = 1$

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2)} = \frac{0{,}001}{0{,}001 + 0{,}04 \cdot 0{,}999} = 0{,}0244$$

Wynik może wydawać się zaskakujący i sprzeczny z intuicją – szansa, że osoba, u której test wykazał odpowiedź pozytywną jest rzeczywiście chora, wynosi zaledwie 2,44%.

O czym świadczy uzyskany wynik?

3.6. Schemat Bernoulliego

W konstrukcji tego schematu podstawową rolę odgrywa pojęcie niezależności zdarzeń.

Wielokrotnie powtarzany eksperyment nazywamy schematem Bernoulliego jeżeli spełnione są następujące warunki

- ✓ składa się z serii n prób, przy czym kolejne próby są niezależne,
- ✓ w każdej próbie możliwe są dwa wyniki (wzajemnie wykluczające się), z których jeden nazywamy sukcesem (oznaczanym przez „1"), a drugi porażką (oznaczaną przez „0"),

- ✓ prawdopodobieństwo sukcesu p jest stałe w każdym kolejnym doświadczeniu (podobnie prawdopodobieństwo porażki $q = 1 - p$).

Powyższe warunki spełnione są na przykład w przypadku rzutu kostką do gry: określamy co rozumiemy jako sukces a co za porażkę, (np. wyrzucenie „szóstki” jest sukcesem, a za porażkę uznajemy każdy inny wynik na kostce, $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$).

Niech A będzie zdarzeniem, którego elementami są ciągi $\omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, w których dokładnie k elementów stanowią „1”, a pozostałe (n-k) elementów stanowią „0”.
Dla każdego takiego ω mamy $P(\omega) = p^k(1-p)^{n-k}$.

Natomiast prawdopodobieństwo pojawienia się k sukcesów w n próbach (zdarzenie S_k) zadana jest wzorem

$$P(S_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{16}$$

Przykład 3.12
Rzucając 5 razy monetą wyznacz prawdopodobieństwo tego, że a) orzeł po raz pierwszy wypadnie za piątym razem (zdarzenie A); (b) orzeł wypadnie za drugim razem (zdarzenie B1) lub wypadną trzy reszki (zdarzenie B2), (c) nigdy nie wypadnie (zdarzenie C), d) wygeneruj 10 przykładowych wyników (wykorzystaj generator liczb pseudolosowych).

Rozwiązanie

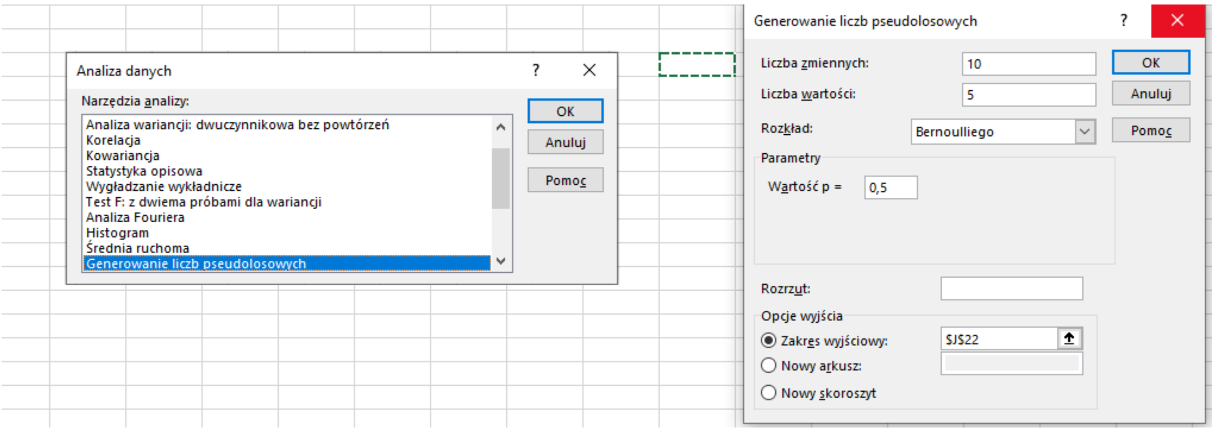
$$P(A) = P(C) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0{,}03$$

$$P(B) = P(B1 \cup B2) = P(B1) + P(B2) = 16\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 26\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0{,}81$$

orzeł wypadnie za drugim razem, tzn. w pierwszym rzucie może wypaść O lub R, w drugim ma wypaść O, w pozostałych trzech O lub R, czyli wyników spełniających warunek jest$2 * 1 * 2 * 2 * 2 = 2^4$.

Do wygenerowania 10 przykładowych wyników można wykorzystać narzędzia analizy danych -> generowanie liczb pseudolosowych z rozkładu Bernoullego (rys.8).

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki” nr FERS.01.05-IP.08-0234/23



Rys.8. Generowanie liczb pseudolosowych z rozkładu dwumianowego

0	0	1	1	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	0	1	0	1

Rys.9. Wynik generowania

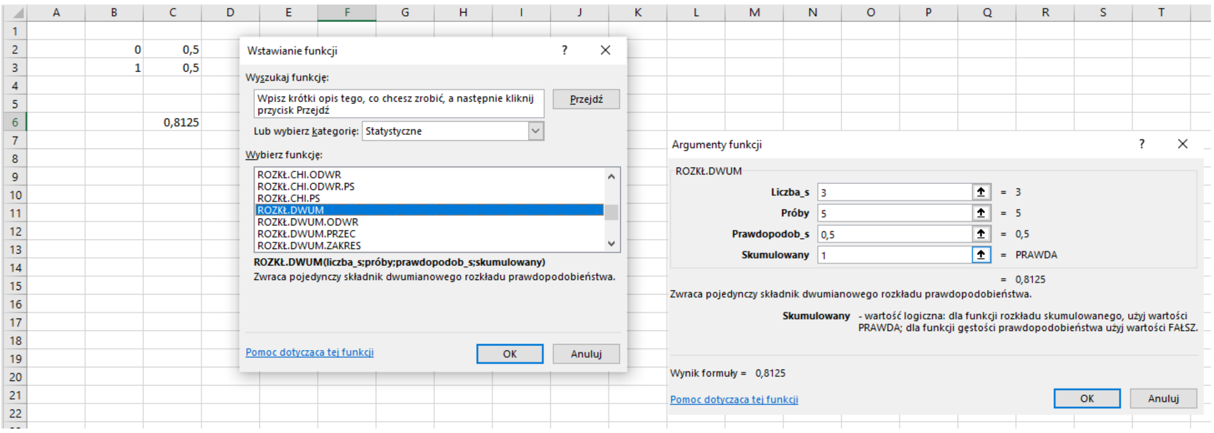
Przykład 3.13
Wiedząc, że firma uzyskuje zysk w wysokości co najmniej 300 tys. PLN z prawdopodobieństwem 0,7 wyznacz prawdopodobieństwo tego, że w przeciągu najbliższych 5 lat firma co najmniej 3 razy osiągnie taki zysk.

Rozwiązanie
S_5- liczba lat, w których firma osiągnie żądany zysk, $p = 0{,}7,\ n = 5$.
Szukane prawdopodobieństwo

$$P(S_5 \geq 3) = P(S_5 = 3) + P(S_5 = 4) + P(S_5 = 5) = \sum_{k=3}^{5} \binom{5}{k} (0{,}7)^k (0{,}3)^{5-k}$$
$$= 0{,}31 + 0{,}36 + 0{,}17 = 0{,}84$$

Do obliczeń możemy wykorzystać funkcję ROZKŁ.DWUM skumulowany (rys.10)

$$P(S_5 \geq 3) = 1 - PP(S_5 < 2) = 1 - ROZKŁ.DWUM(2; 5; \frac{1}{2}; 1)$$



Rys.10. Obliczanie prawdopodobieństwa z rozkładu dwumianowego za pomocą funkcji ROZKŁ.DWUM(; ; ; ;)

3.7. Zadania do samodzielnego rozwiązania

3.1. Rzucamy dwukrotnie monetą. Przyjmując, że A oznacza zdarzenie polegające na wyrzuceniu orła za pierwszym razem, natomiast B – oznacza wyrzucenie orła w drugim rzucie należy zbadać niezależność opisanych zdarzeń.

3.2. Wykorzystując generator liczb pseudolosowych wygenerować ciąg przykładowych 20 wyników rzutu monetą. Obliczyć prawdopodobieństwo uzyskania reszki. Czy wynik ulegnie zmianie, gdy zwiększymy liczbę rzutów do 100, a następnie do 1000?

3.3. Rozważamy string złożony z czterech bitów, każdy bit jest generowany losowo z takim samym prawdopodobieństwem. Obliczyć prawdopodobieństwo wygenerowania stringu zawierającego co najmniej dwa kolejne 0, jeśli wiadomo, że pierwszy bit jest równy 0.

3.4. Rzucamy trzema kostkami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na żadnej kostce nie wypadnie 6, jeżeli na każdej kostce wypada inna liczba oczek.

3.5. Jaka jest szansa wyrzucenia takiej samej liczby oczek w dwóch rzutach rzetelną kostką do gry?

3.6. Z pudełka, w którym jest sześć par butów, wyciągamy dwa buty. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy buty z jednej pary?

3.7. Rzucamy dwiema kostkami do gry. Niech A1 oznacza zdarzenie polegające na wyrzuceniu parzystej liczby oczek na pierwszej kostce, A2 – nieparzystej liczby oczek na drugiej kostce, A3 – nieparzystej bądź parzystej liczby oczek na obu kostkach. Zbadać niezależność zdarzeń A1, A2 i A3.

3.8. Długoletnie doświadczenia wskazują na to, że część pisemna pewnego egzaminu jest istotnie trudniejsza – (60% zdających), od części ustnej – (95% zdających). Aby zdać egzamin, trzeba pozytywnie zaliczyć obie części, przy czym obowiązuje zasada, że student, który nie zaliczył części pisemnej nie jest dopuszczony do części ustnej. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że student, który nie zdał egzaminu, nie zaliczył części pisemnej.

3.9. Niech prawdopodobieństwo, że danego dnia na pierwszym skrzyżowaniu trafimy na zielony sygnał świetlny, będzie równe 0,5. Sygnalizacja jest tak ustawiona, że w przypadku zatrzymania się na dowolnym skrzyżowaniu przy świetle czerwonym prawdopodobieństwo tego, że na następnym skrzyżowaniu zastaniemy światło zielone jest równe 0,95, natomiast prawdopodobieństwo tego, że jeśli na dowolnym skrzyżowaniu będziemy mieli światło zielone, to i na następnym będziemy mieli światło zielone, jest równe 0,10. Oblicz prawdopodobieństwo, że w danym dniu na trzecim i czwartym skrzyżowaniu będziemy mieli światło zielone.

3.10. Pewna gra polega na rzucie kostką i monetą. Wygrana następuje przy łącznym otrzymaniu piątki i orła. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w trzech grach wygrana nastąpi dokładnie raz?

3.11. Student zna odpowiedź na pytanie egzaminacyjne z prawdopodobieństwem p. Jeżeli nie zna odpowiedzi, to zgaduje jedną z k możliwych odpowiedzi z prawdopodobieństwem $1/k$. Jeżeli odpowiedział prawidłowo, to jakie jest prawdopodobieństwo, że znał odpowiedź? Sprawdzić, jak zmienia się szukane prawdopodobieństwo w zależności od p i k.

3.12. Rzucamy (jednokrotnie) kostką. Sprawdzić, czy zdarzenia A i B są niezależne, jeżeli: A – oznacza zdarzenie polegające na wyrzuceniu 1 lub 2; B - oznacza zdarzenie polegające na wyrzuceniu parzystej liczby oczek.

3.13. Zgodnie z danymi publikowanymi przez GUS w 2023 roku 51,2% urodzeń żywych ogółem stanowili chłopcy. Zakładając, że w rodzinie jest czwórka dzieci wyznaczyć: a) prawdopodobieństwo, że w rodzinie jest co najmniej jeden chłopiec; b) prawdopodobieństwo, że w rodzinie są sami chłopcy, jeżeli wiadomo, że w tej rodzinie jest co najmniej jeden chłopiec.

3.14. Ile kuponów Lotto należy nabyć, aby prawdopodobieństwo trafienia co najmniej jeden raz „szóstki" było większe od 0,5? (Prawdopodobieństwo trafienia „szóstki" wynosi: $\frac{1}{\binom{49}{6}} \approx \frac{1}{14\,000\,000}$).

3.15. Student umie odpowiedzieć na 20 spośród 25 pytań egzaminacyjnych. Na egzaminie losuje 3 pytania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że odpowie a) na 2 pytania, b) na wszystkie. Używając poznanych funkcji MS Excel wygeneruj ciąg symbolizujący odpowiedzi studenta na 3 pytania (wykorzystaj technikę losowania dynamicznego).

3.16. W magazynie są ubrania trzech firm krawieckich A_1, A_2, A_3, przy czym wiadomo, że z firmy A_1 pochodzi 50% ubrań, z A_2 30%, z A_3 20% ubrań. Firma pierwsza produkuje 80% ubrań pierwszego gatunku, firma druga 70%, trzecia 60%. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrane ubranie, które jest pierwszego gatunku (zdarzenie B) pochodzi z firmy pierwszej.

3.17. Wypożyczalnia dysponuje 20 rowerami. Niestety trzy są uszkodzone. Losujemy pięć rowerów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosujemy a) tylko sprawne rowery, b) dokładnie jeden uszkodzony. Używając poznanych funkcji MS Excel wygeneruj ciąg będący potencjalnym wynikiem losowania rowerów.

3.18. Wadliwość procesu produkcyjnego wynosi 10%. Oblicz prawdopodobieństwo, że na 10 wylosowanych produktów będą co najwyżej dwa złe.

3.19. Wiadomo, że 65% mężczyzn i 50% kobiet nie zdaje egzaminu na prawo jazdy za pierwszym razem. Wybrana losowo osoba nie zdała egzaminu. Zakładając, że zdających mężczyzn jest trzy razy więcej niż kobiet, obliczyć prawdopodobieństwo tego, że wybraną osobą jest kobieta.

3.20. Zakładając, że 53% bezrobotnych stanowią kobiety, ponadto, wśród bezrobotnych kobiet 9%, a wśród bezrobotnych mężczyzn 12% ukończyło 45 lat. Obliczyć prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba spośród bezrobotnych ma powyżej 45 lat.

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki” nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

4. Literatura

1. Aczel M. (2017), *Statystyka w zarządzaniu*, Wydawnictwo, PWN, Warszawa
2. Cieciura M., Zacharski J. (2011), *Rachunek prawdopodobieństwa w ujęciu praktycznym*, Część III, Podstawy probabilistyki z przykładami zastosowań w informatyce, Vizja Press&IT Sp. z o.o., Warszawa.
3. Duda R. (2020). Recepcja rachunku prawdopodobieństwa i metod statystycznych w Polsce, *ANTIQUITATES MATHEMATICAE*, 14(1), 55-87.
4. E-learning – matematyka – poziom rozszerzony, Rachunek prawdopodobieństwa z elementami statystyki, Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne, (https://zasobyip2.ore.edu.pl/uploads/publications/f2b01fd92b7b64463c19234ae2ab3d2d, dostępny 20.12.2024)
5. Jakubowski J., Sztencel R. (2006), *Rachunek prawdopodobieństwa dla prawie każdego*, Script.
6. Krysicki W., Bartos J., Dyczka W., Królikowska K., Wasilewski M. (2007), *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach*, część I, Wydawnictwo PWN Warszawa
7. Łakoma E. (1989). O narodzinach pojęcia prawdopodobieństwa, *Kwartalnik Historii Nauki i Techniki*, 34(3), 613-632
8. Ombach J. (2006), *Wprowadzenie do metod probabilistycznych wspomagane komputerowo - MAPLE*, Wydawnictwo PWSZ, Nowy Sącz.