Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego | Rzeczpospolita Polska | Dofinansowane przez Unię Europejską

Politechnika Świętokrzyska
Wydział Zarządzania i Modelowania Komputerowego

Kierunek studiów:
Inżynieria danych

Sylwia Hożejowska

Materiały dydaktyczne do przedmiotu

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE

opracowane w ramach realizacji Projektu
„**Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki**”
FERS.01.05-IP.08-0234/23

Kielce, 2025

Spis treści

1. Wstęp 4
2. Podstawowe informacje dotyczące równań różniczkowych 4
2.1. Zadania przykładowe 4
2.2 Zadania do samodzielnego rozwiązania 7
3. Równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych 7
3.1. Zadania przykładowe 7
3.2 Zadania do samodzielnego rozwiązania 14
4. Równania różniczkowe jednorodne względem x i y 15
4.1. Zadania przykładowe 15
4.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania 17
5. Równania różniczkowe liniowe rzędu pierwszego 18
5.1. Zadania przykładowe 18
5.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania 21
6. Równania różniczkowe Bernoullego 21
6.1. Zadania przykładowe 21
6.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania 25
7. Równania różniczkowe zupełne 25
7.1. Zadania przykładowe 26
7.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania 27
8. Równania różniczkowe liniowe rzędu *n*-tego o stałych współczynnikach 28
8.1. Zadania przykładowe 30
8.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania 33
9. Odpowiedzi do zadań 34
9.1. Odpowiedzi do rozdziału 2 34
9.2. Odpowiedzi do rozdziału 3 34
9.3. Odpowiedzi do rozdziału 4 36
9.4. Odpowiedzi do rozdziału 5 36
9.5. Odpowiedzi do rozdziału 6 36
9.6. Odpowiedzi do rozdziału 7 37

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki" nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

9.7. Odpowiedzi do rozdziału 8 37
10. Literatura 38

Materiały dydaktyczne autorstwa Sylwii Hożejowskiej objęte licencją Creative Commons BY 4.0.
Licencja dostępna pod adresem: https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

1. Wstęp

Niniejsze opracowanie dydaktyczne zostało przygotowane z myślą o studentach uczęszczających na kurs równań różniczkowych na Wydziale Zarządzania i Modelowania Komputerowego Politechniki Świętokrzyskiej. Jego celem jest zaprezentowanie w uporządkowany i przystępny sposób podstawowych metod stosowanych przy rozwiązywaniu równań różniczkowych zwyczajnych. Materiały te mają charakter praktycznego przewodnika i można je traktować jako rozbudowaną instrukcję, pomagającą prześledzić sposób postępowania w przypadku różnych typów zadań, z jakimi studenci najczęściej spotykają się w trakcie zajęć.
Trzeba jednak podkreślić, że niniejsze materiały pełnią funkcję pomocniczą. Nie zawierają one pełnego zestawienia wiedzy teoretycznej z zakresu równań różniczkowych, ponieważ rolę tę spełnia przede wszystkim wykład prowadzony w ramach kursu, a także literatura przedmiotu zamieszczona na końcu opracowania. Tym samym zakłada się, że student posiada już podstawowe wiadomości teoretyczne, obejmujące podstawowe pojęcia związane z równaniami różniczkowymi oraz znajomość typowych metod stosowanych przy ich rozwiązywaniu. Dzięki takiemu podejściu materiały koncentrują się przede wszystkim na stronie praktycznej – ilustrują zastosowanie wybranych technik w rozwiązywaniu zadań, ułatwiają przećwiczenie zdobytej wiedzy oraz umożliwiają samodzielne utrwalenie umiejętności. Można je więc traktować jako uzupełnienie treści wykładowych i podręcznikowych, wspierające studenta w stopniowym opanowywaniu zagadnień z zakresu równań różniczkowych zwyczajnych.

2. Podstawowe informacje dotyczące równań różniczkowych

Podane tutaj przykłady skupiają się na podstawowych pojęciach związanych z równaniami różniczkowymi takimi jak rodzaj równania różniczkowego, niewiadoma w równaniu różniczkowym i jej argument (-y), rząd równania różniczkowego i rozwiązanie ogólne oraz szczególne równania.

2.1. Zadania przykładowe

Przykład 1. Wskazać, które z podanych równań jest równaniem różniczkowym. Dla równań różniczkowych podać czy jest ono zwyczajne czy cząstkowe, wskazać niewiadomą funkcję i jej argument (-y) oraz rząd równania.

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki" nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

a) $2xy^2 = 2xy' + 3y''$,
b) $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial^3 z}{\partial t^3} = ut$,
c) $\sqrt{\frac{d^4x}{dt^4}} = xln\, t$,
d) $x\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = T$,
e) $ye^x - xe^y = 0$,
f) $pdq + qlnpdp = 0$.

Równanie jest równaniem różniczkowym jeżeli zawiera pochodne bądź różniczki nieznanej funkcji. Jeżeli niewiadoma funkcja zależy od jednej zmiennej, to mówimy o równaniu różniczkowym zwyczajnym, a jeżeli od wielu zmiennych, to mówimy o równaniu różniczkowym cząstkowym. Rząd równania różniczkowego to rząd najwyższej z pochodnych lub różniczek występujących w tym równaniu.

Rozwiązanie

Ad. a) Równanie jest równaniem różniczkowym zwyczajnym bowiem zawiera pochodne zwyczajne rzędu pierwszego i drugiego. Niewiadomą funkcją jest funkcja y, której argumentem jest x , tj. szukamy funkcji $y(x)$. Ponieważ rząd najwyższej pochodnej niewiadomej funkcji wynosi dwa, to i rząd równania wynosi dwa.

Ad. b) Równanie jest równaniem różniczkowym cząstkowym bowiem zawiera pochodne cząstkowe rzędu pierwszego i trzeciego. Niewiadomą funkcją jest funkcja z o argumentach t i u, czyli szukamy funkcji postaci $z(t,u)$. Rząd równania wynosi trzy.

Ad. c) Równanie jest równaniem różniczkowym zwyczajnym o niewiadomej funkcji x, której argumentem jest t, czyli szukamy funkcji postaci $x(t)$. Rząd równania wynosi cztery.

Ad. d) Równanie jest równaniem różniczkowym cząstkowym o niewiadomej funkcji T, której argumenty to x, y, z, czyli czyli szukamy funkcji postaci $T(x, y, z)$. Rząd równania wynosi dwa.

Ad. e) Równie to nie jest równaniem różniczkowym bowiem nie zawiera ani pochodnych ani różniczek funkcji.

Ad. f) Aby wykonać polecenie zadania zapiszmy to równanie w innej postaci. Dzieląc obie strony równania przez dq otrzymujemy

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki" nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

$$p + qlnp\frac{dp}{dq} = 0$$

Tak zapisane równanie jest równaniem różniczkowym zwyczajnym o niewiadomej funkcji p, której argumentem jest q, czyli szukamy funkcji postaci $p(q)$. Rząd równania wynosi jeden.
Natomiast, gdy podzielimy równanie stronami przez dp mamy

$$p\frac{dq}{dp} + qlnp = 0$$

Równie to jest również równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu pierwszego, ale niewiadomą funkcją jest funkcja q o argumencie p, tj. $q(p)$.
Podsumowując, równie jest równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu pierwszego. W zależności od sposobu przekształcenia równania, niewiadomą funkcją jest funkcja postaci $p(q)$ lub $q(p)$. Zaznaczmy, że funkcje te są funkcjami odwrotnymi.

Przykład 2. Sprawdź czy funkcja $y = 3x\,cos\,x$ jest rozwiązaniem (całką) równania różniczkowego $xy'' - 2y' + xy = -6\,cos\,x$.

Rozwiązanie
Aby sprawdzić czy podana funkcja jest rozwiązaniem równania różniczkowego należy podstawić ją do tego równania. W tym celu trzeba policzyć pierwszą i drugą pochodną tej funkcji.
Pierwsza pochodna:

$$y' = 3\,cos\,x - 3xsinx$$

Druga pochodna:

$$y'' = -3sinx - 3sinx - 3xcosx = -6sinx - 3xcosx$$

Podstawiamy teraz funkcję oraz jej pochodne do równania, o dokładniej do lewej strony równania (LSR)

$$LSR = xy'' - 2y' + xy = x(-6sinx - 3xcosx) - 2(3cosx - 3xsinx) + x(3xcosx)$$
$$= -6xsinx - 3x^2cosx - 6cosx + 6xsinx + 3x^2cosx = -6cosx$$

Prawa strona równania (PSR) wynosi

$$PSR = -6cosx$$

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki" nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

Zatem $LSR = PSR$ więc podana funkcja jest rozwiązaniem danego równania różniczkowego.

W przypadku równań różniczkowych szukanie rozwiązania takiego równania, jak zobaczymy dalej, polega bardzo często na obliczaniu całek. Dlatego rozwiązanie równania różniczkowego nazywamy również „całką” tego równania. W dalszej części zamiast „równanie różniczkowe” będziemy pisać krótko „równanie”.

2.2 Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1.
Wskazać, które z podanych równań jest równaniem różniczkowym (zwyczajnym lub cząstkowym). Dla równań różniczkowych podać niewiadomą funkcję i jej argument (-y) oraz rząd równania:

a) $y^2 - xy\frac{dx}{dy} = cos\, x$,
b) $\sqrt{t'''} + \frac{t'}{w} = e^w$,
c) $R\frac{d^2U}{dR^2} - 3U^2 = 3$,
d) $x^2y - 2x\, ln\, y = 0$,
e) $\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial y} + 3\frac{\partial z}{\partial x} = 0$.

Zadanie 2.
W każdym z przykładów sprawdzić, czy podana funkcja jest rozwiązaniem danego równania różniczkowego.

a) funkcja: $y = z^2 + z^2\, ln\, z$, dla $z > 0$, równanie: $z^2y'' - 3zy' + 4y = 0$,
b) funkcja: $p = \frac{sinq}{q^2}$, dla $q \neq 0$, równanie: $qp' + p = cosq$,
c) funkcja: $u = Ccos(3t)\sin(3x)$, równanie: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

3. Równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych

Metoda rozdzielenia zmiennych jest popularną metodą rozwiązywania równań różniczkowych. W niniejszym rozdziale zastosujemy ją do wyznaczania rozwiązań równań zwyczajnych rzędu pierwszego co omówione zostanie na przykładach.

3.1. Zadania przykładowe

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki” nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

Przykład 1. Metodą rozdzielenia zmiennych rozwiązać równania:

a) $xy' - (x+1)y = 0$,
b) $e^{-x}\frac{dy}{dx} = (2x+1)\sqrt{y}$ przy warunku początkowym $y(0) = 4$.

Rozwiązanie

Ad. a) Zapiszmy występującą w równaniu pochodną szukanej funkcji y w postaci ilorazu różniczek, tj. $y' = \frac{dy}{dx}$. Równanie ma wtedy postać

$$x\frac{dy}{dx} - (x+1)y = 0$$

Dalsze przekształcenia będą miały na celu rozdzielenie zmiennych w tym równaniu. Najpierw przenosimy składnik $(x+1)y$ na prawą stronę równania

$$x\frac{dy}{dx} = (x+1)y \;/: xy$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)}{x}$$

Mnożąc obie strony powyższego równania przez dx mamy równanie, w którym lewa strona zależy tylko od zmiennej y zaś prawa od x

$$\frac{dy}{y} = \frac{(x+1)}{x}dx$$

Następnym krokiem jest scałkowanie równania stronami, tj.

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{(x+1)}{x}dx$$

Obliczając odpowiednie całki mamy

$$\int \frac{dy}{y} = ln|y|$$

$$\int \frac{(x+1)}{x}dx = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx = x + ln|x| + C$$

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki" nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

Stałą całkową piszemy tylko przy jednej całce. Ze względu na prostotę zapisu i dalsze obliczenia jest to całka, gdzie występuje argument niewiadomej funkcji. Zatem funkcja y spełnia warunek

$$ln|y| = x + ln|x| + C$$

Niewiadoma funkcja y jest podana w postaci uwikłanej i w tym przykładzie jest możliwość wyznaczenia jej jawnej postaci. Wykorzystując definicję logarytmu oraz własności funkcji wykładniczej możemy wykonać następujące przekształcenia

$$|y| = e^{x+ln|x|+C}$$

$$|y| = e^{x}e^{ln|x|}e^{C}$$

Oznaczając $\pm e^{C} = C_1$ i korzystając z własności logarytmu $e^{ln|x|} = |x|$ otrzymujemy rozwiązanie równania różniczkowego w postaci

$$y(x) = C_1 x e^{x}$$

Zauważmy, że obliczenia zostały wykonane przy założeniu $x \neq 0$ i $y \neq 0$. Jednak funkcja $y(x) = 0$ gdzie $x \in R$ też jest rozwiązaniem równania co łatwo sprawdzić (podstawiając $y(x) = 0$ do równania) i co zostawiamy czytelnikom.
Zatem rozwiązanie $y(x) = C_1 x e^{x}$ gdzie $x \in R$ jest rozwiązaniem ogólnym (całką ogólną) równania różniczkowego.

Ad.b) Analogicznie jak w przykładzie a) wyznaczymy w pierwszym kroku rozwiązanie ogólne równania. Wykonane poniżej przekształcenia mają na celu rozdzielenie zmiennych w równaniu. Zatem mnożymy równanie stronami przez e^{x} i $\frac{1}{\sqrt{y}}$ otrzymując

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} = (2x+1)\, e^{x}$$

Mnożąc dalej obie strony przez dx rozdzielmy ostatecznie zmienne

$$\frac{1}{\sqrt{y}}dy = (2x+1)\, e^{x}dx$$

Możemy teraz scałkować równanie stronami

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki" nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \int y^{-\frac{1}{2}} dy = 2y^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{y}$$

$$\int (2x+1)\, e^x dx = \begin{bmatrix} u = 2x+1 & v' = e^x \\ u' = 2 & v = e^x \end{bmatrix} = (2x+1)e^x - \int 2e^x dx$$
$$= (2x+1)e^x - 2e^x + C = (2x-1)e^x + C$$

Porównując otrzymane całki mamy

$$2\sqrt{y} = (2x-1)e^x + C$$

Stąd, po pomnożeniu równania stronami przez ½ , rozwiązanie równania dla $y \geq 0$ i $x \in R$ możemy zapisać w postaci uwikłanej

$$\sqrt{y} = \left(x - \frac{1}{2}\right) e^x + \frac{1}{2} C$$

Oznaczając $\frac{1}{2} C = C_1$ i podnosząc równanie stronami do kwadratu otrzymujemy postać jawną rozwiązania ogólnego (całki ogólnej) równania różniczkowego

$$y(x) = \left[\left(x - \frac{1}{2}\right) e^x + C_1\right]^2$$

W zadaniu podany jest warunek $y(0) = 4$, który możemy wykorzystać w celu wyznaczenia stałej C_1. Podstawiając do powyższego rozwiązania $x = 0$ i $y = 4$ otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą

$$4 = \left(-\frac{1}{2} + C_1\right)^2$$

z którego wyliczamy stałą C_1, tj.

$$C_1 - \frac{1}{2} = 2$$

lub

$$C_1 - \frac{1}{2} = -2$$

Zatem

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki" nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

$$C_1 = 2\frac{1}{2} \text{ lub } C_1 = -1\frac{1}{2}$$

co daje nam dwa rozwiązania w postaci

$$y_1(x) = \left[\left(x - \frac{1}{2}\right)e^x + 2\frac{1}{2}\right]^2$$

$$y_2(x) = \left[\left(x - \frac{1}{2}\right)e^x - 1\frac{1}{2}\right]^2$$

Funkcje $y_1(x)$ i $y_2(x)$ są nazywane rozwiązaniami szczególnymi (całkami szczególnymi) równania różniczkowego.

Przykład 2. Kulę żelazną nagrzaną do temperatury 400°C umieszczono w obszernym pomieszczeniu o temperaturze 20°C. Po 10 minutach temperatura kuli spadła do 100°C. Wyznaczyć temperaturę kuli jako funkcję czasu. Jaka jest temperatura kuli po godzinie? Po jakim czasie temperatura kuli wyniesie 30°C?

Rozwiązanie
Wprowadźmy następujące oznaczenia:
T – temperatura kuli podana w ^{o}C,
t – czas w minutach,
T_{pom} – temperatura pomieszczenia i T_{pom}=20 ^{o}C,
k – bezwymiarowy dodatni współczynnik proporcjonalności.
W rozwiązaniu tego zadania wykorzystamy prawo stygnięcia Newtona, które stwierdza, że zmiana temperatury ciała jest proporcjonalna do różnicy temperatur między tym ciałem a jego otoczeniem.
Ponieważ zmianę temperatury kuli w krótkim czasie opisuje pochodna $\frac{dT}{dt}$ to w oparciu o prawo stygnięcia otrzymujemy równanie różniczkowe pozwalające wyliczyć temperaturę kuli jako funkcję czasu, tj.

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{pom})$$

Temperatura kuli jest funkcja malejącą (kula stygnie) więc jej pochodna jest ujemna. Po prawej stronie równania stała k oraz różnica $T - T_{pom}$ są dodatnie więc przed ich iloczynem mamy znak minus.

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki" nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

Wykorzystując informację o temperaturze kuli na początku procesu i po 10 minutach otrzymujemy dwa warunki w postaci $T(0) = 400^{o}$C i $T(10) = 100^{o}$C. Ostatecznie musimy rozwiązać równanie różniczkowe

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{pom})$$

z warunkami: $T(0) = 400^{o}$C i $T(10) = 100^{o}$C.
Stosując metodę rozdzielenia zmiennych otrzymujemy równanie

$$\frac{dT}{T - T_{pom}} = -kdt$$

które po scałkowaniu stronami daje nam rozwiązanie w postaci

$$ln|T - T_{pom}| = -kt + C$$

Wyliczając stąd temperaturę postępujemy analogicznie jak w przykładzie 1, wyznaczając rozwiązanie ogólne równania różniczkowego, tj.

$$T(t) = T_{pom} + e^{-kt+C} = T_{pom} + e^{-kt}e^{C} = T_{pom} + C_1 e^{-kt}$$

gdzie $C_1 = e^{C}$.
Stałe C_1 oraz k wyliczamy wykorzystując znane warunki. Podstawiając do powyższego rozwiązania T_{pom}=20 ^{o}C, $T = 400^{o}$C i t =0 otrzymujemy równanie pozwalające wyliczyć stałą C_1 (w obliczeniach pomijane są jednostki)

$$400 = 20 + C_1$$

Stąd C_1 =380. Do obliczenia stałej k wykorzystamy drugi warunek gdzie dla $t = 10$ mamy T =100 ^{o}C.
Zatem

$$100 = 20 + 380e^{-10k}$$

Przenosząc 20 na lewą stronę równania mamy

$$80 = 380e^{-10k} \quad /: 380$$

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki" nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

$$e^{-10k} = \frac{4}{19}$$

Stąd w oparciu o definicję logarytmu otrzymujemy, że

$$-10k = ln\frac{4}{19} \quad /:(-10)$$

Ostatecznie stała k jest równa

$$k = -\frac{1}{10}ln\frac{4}{19} \approx 0{,}1558$$

Zatem zależność temperatury kuli od czasu ma postać

$$T(t) = 20 + 380e^{-0{,}1558t}$$

Policzmy temperaturę kuli po godzinie podstawiając do otrzymanego rozwiązania $t = 60$.

$$T(60) = 20 + 380e^{-0{,}1558\cdot 60} = 20 + 380e^{-9{,}348} \approx 20{,}03\ ^{o}\mathrm{C}$$

Zostaje jeszcze odpowiedzieć na pytanie po jakim czasie temperatura kuli wyniesie 30°C. Tym razem podstawiamy do rozwiązania $T = 30$, i wyliczamy niewiadomą t, tj.

$$30 = 20 + 380e^{-0{,}1558t}$$

Postępując analogicznie jak wcześniej otrzymujemy

$$380e^{-0{,}1558t} = 10 \quad /:380$$

$$e^{-0{,}1558t} = \frac{1}{38}$$

Stąd

$$-0{,}1558t = ln\frac{1}{38} \quad /:(-0{,}1558)$$

Ostatecznie

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki" nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

$$t = -\frac{1}{0{,}1558} ln \frac{1}{38} \approx 23{,}35$$

Czyli po około 23 minutach kula osiągnie temperaturę 30 ^{o}C.

3.2 Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1.
Rozwiązać równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych:

a) $-2x^2 \frac{dy}{dx} + y = 0$,
b) $\frac{1}{x^2+2x+3} \cdot y' = \frac{1}{y}$,
c) $\sqrt{x^2+6} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^2}$,
d) $\frac{dy}{dx}(8+x^2) - y + 2 = 0$,
e) $(y+3)dx + xdy = 0$,
f) $\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3+4e^x+1}{y}$,
g) $\sqrt{4-x^2} \cdot y' = 2y$,
h) $y' = y^2$ przy warunku $y(1) = -1$,
i) $(1+e^x)y\frac{dy}{dx} = e^x$ przy warunku $y(1) = 2$.

Zadanie 2.
W zbiorniku, w którym było 300 litrów wody rozpuszczono 20 kg pewnej substancji. Do zbiornika pompowany jest z prędkością 3 litry na minutę roztwór tejże substancji. Następuje dokładne mieszanie i wypompowywanie zmieszanego roztworu z prędkością 4 litry na minutę. Określić ilość substancji w zbiorniku jako funkcję czasu jeżeli stężenie roztworu pompowanego do zbiornika wynosi 1 kg na 5 litrów. Jakie będzie stężenie roztworu w zbiorniku po 50 minutach?

Zadanie 3.
Punkt materialny o masie m porusza się ruchem prostoliniowym pod działaniem siły F wprost proporcjonalnej do czasu t, a odwrotnie proporcjonalnej do jego prędkości V. Wyrazić prędkość V jako funkcję czasu, jeżeli prędkość początkowa wynosiła zero.

Zadanie 4. Populacja pewnego gatunku liczyła początkowo N_0 osobników, a po jednym miesiącu liczyła już (3/2)N_0 osobników. Przyjmując, że szybkość wzrostu liczebności populacji jest proporcjonalna do aktualnej liczby osobników, wyznaczyć liczebność populacji jako funkcję czasu. Po jakim czasie populacja ta potroi się?

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki" nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

4. Równania różniczkowe jednorodne względem x i y

Istnieje szereg równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego, które przez podstawienie można sprowadzić do równań o zmiennych rozdzielonych. Takimi równaniami są równania różniczkowe jednorodne względem x i y, tj. takie równania, które można przekształcić do postaci

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1}$$

Zastosowanie podstawienia

$$u = \frac{y}{x} \tag{2}$$

prowadzi do rozwiązania równania o zmiennych rozdzielonych, w którym niewiadomą jest funkcja $u(x)$.

4.1. Zadania przykładowe

Przykład 1. Rozwiązać równanie różniczkowe $x^2\frac{dy}{dx} + y^2 = xy\frac{dy}{dx}$ przy warunku $y(3) = 4$.

Rozwiązanie

Przekształćmy w pierwszej kolejności równanie tak, aby widoczny był stosunek $\frac{y}{x}$. W tym celu dzielimy obie strony równania przez x^2 (przy założeniu, że $x \neq 0$) i otrzymujemy

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{y}{x}\frac{dy}{dx}$$

Dokonujemy w powyższym równaniu podstawienia $u = \frac{y}{x}$ lub $y = ux$. W tym celu musimy policzyć pochodną y'

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ux) = \frac{du}{dx}x + u$$

Po podstawieniu mamy równanie

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki" nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

$$\frac{du}{dx}x + u + u^2 = u\left(\frac{du}{dx}x + u\right)$$

Przekształcając dalej otrzymujemy

$$\frac{du}{dx}x + u + u^2 = ux\frac{du}{dx} + u^2$$

a po redukcji wyrazów podobnych i przeniesieniu składników $ux\frac{du}{dx}$ oraz u na drugie strony równanie ma postać

$$\frac{du}{dx}x - ux\frac{du}{dx} = -u$$

Wyłączając po lewej stronie $-\frac{du}{dx}x$ przed nawias otrzymujemy

$$-\frac{du}{dx}x(u-1) = -u \ \ /\cdot\left(-\frac{dx}{xu}\right)$$

Ostatecznie równanie po rozdzieleniu zmiennych ma postać

$$\frac{u-1}{u}du = \frac{1}{x}dx$$

którą możemy scałkować stronami. Obliczmy całki

$$\int \frac{u-1}{u}du = \int\left(1 - \frac{1}{u}\right)du = u - ln|u|$$

$$\int \frac{1}{x}dx = ln|x| + C$$

Stąd funkcja u spełniająca równanie na postać

$$u - ln|u| = ln|x| + C$$

Wracając do podstawienia otrzymujemy rozwiązanie ogólne wyjściowego równania różniczkowego

$$\frac{y}{x} - ln\left|\frac{y}{x}\right| = ln|x| + C$$

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki" nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

Korzystając z własności logarytmu możemy uprościć rozwiązanie

$$\frac{y}{x} - ln|y| + ln|x| = ln|x| + C$$

$$\frac{y}{x} - ln|y| = C$$

Pomnożenie stronami przez x daje nam ostateczne rozwiązanie ogólne (całkę ogólną) równania różniczkowego w postaci uwikłanej, tj.

$$y(x) - xln|y(x)| = Cx$$

Zauważmy, że rozwiązanie jest dla $y \neq 0$ i $x \epsilon R$.
Zostało nam jeszcze znaleźć rozwiązanie szczególne równania spełniające warunek $y(3) = 4$. W tym celu podstawiamy do rozwiązania ogólnego $x = 3$, $y = 4$ i otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą C

$$4 - 3ln|4| = 3C$$

Dzieląc równanie stronami przez 3 mamy

$$C = \frac{4}{3} - ln|4|$$

Ostatecznie, rozwiązanie szczególne (całka szczególna) równania różniczkowego spełniająca warunek $y(3) = 4$ jest postaci

$$y(x) - xln|y(x)| = x\left(\frac{4}{3} - ln|4|\right)$$

4.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1.
Rozwiązać równania różniczkowe jednorodne względem x i y:

a) $2\sqrt{xy} + x\frac{dy}{dx} = y$,
b) $\frac{dy}{dx} = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ przy warunku $y(1) = 1$.

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki" nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

5. Równania różniczkowe liniowe rzędu pierwszego

Równanie różniczkowe liniowe rzędu pierwszego nazywamy równanie, które możemy przedstawić w postaci

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{3}$$

gdzie $p(x)$ i $q(x)$ są danymi funkcjami. Jeżeli w równaniu (3) funkcja $q(x) = 0$ to równanie nazywamy równaniem jednorodnym, a w przeciwnym przypadku - niejednorodnym. W rozwiązywaniu równań postaci (3) pomocne jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Rozwiązanie ogólne równania różniczkowego niejednorodnego (RORN) jest sumą rozwiązania ogólnego odpowiedniego równania jednorodnego (RORJ) i rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego (RSRN).

Twierdzenie to można zapisać symbolicznie: RORN=RORJ+RSRN.

W dalszej części rozwiązanie równania różniczkowego niejednorodnego będziemy szukać w dwóch krokach wyznaczając :

Krok 1. RORJ, gdzie zastosujemy metodę rozdzielenia zmiennych.

Krok 2. RSRN, gdzie zastosujemy metodę uzmienniania stałej.

Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego (RORN) jest sumą wyników z kroku 1 i kroku 2.

5.1. Zadania przykładowe

Przykład1. Wskazać, które z poniższych równań różniczkowych to równania liniowe, równania liniowe jednorodne i równania liniowe niejednorodne:

a) $10y' + y^2 sinx = x$,

b) $e^x \frac{dy}{dx} - x^3 y = 0$,

c) $(y')^2 + xy = 2$,

d) $y' + xy = 1$,

e) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{ln\,x} = (ln\,x)^2$.

Rozwiązanie

Równania liniowe: b), d), e).

Równania liniowe jednorodne: b).

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki" nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

Równania liniowe niejednorodne: d), e).
Równania a) i c) są równaniami nieliniowymi.

Przykład 2. Rozwiąż równanie $y' + y = xe^{-x}$.

Rozwiązanie
Rozwiązanie równania otrzymujemy w dwóch krokach.
Krok 1 . Wyznaczamy RORJ, które w tym przykładzie ma postać

$$y' + y = 0$$

Zastosujemy do tego równania metodę rozdzielenia zmiennych. Zapiszmy najpierw pochodną y' w postaci $\frac{dy}{dx}$ i przenieśmy y na prawą stronę równania

$$\frac{dy}{dx} = -y \ /\cdot \frac{1}{y}dx$$

$$\frac{1}{y}dy = -dx$$

Następnie całkujemy równanie stronami

$$\int \frac{1}{y}dy = \int -dx$$

Stąd mamy rozwiązanie w postaci uwikłanej

$$ln|y| = -x + C$$

Wykorzystując definicję logarytmu i własności funkcji wykładniczej mamy

$$y = e^{-x+C} = e^{-x}e^{C}$$

Oznaczając $C_1 = e^{C}$ otrzymujemy RORJ (oznaczone poniżej jako y_0)

$$y_0(x) = C_1 e^{-x}$$

Krok 2. Wyznaczamy RSRN metodą uzmienniania stałej.
Zakładamy, że C_1 jest funkcją argumentu x, tj.

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki" nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

$$C_1 = C(x)$$

W powyższym zapisie pominięto (dla czytelności) indeks „1”.
Wtedy RSRN (oznaczone przez y_s) ma postać

$$y_s = C(x)e^{-x}$$

Aby wyznaczyć funkcję $C(x)$ podstawiamy powyższe rozwiązanie do wyjściowego równania. W tym celu należy najpierw policzyć pochodną y_s

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{dC(x)}{dx}e^{-x} - e^{-x}C(x)$$

Podstawiając mamy

$$\underbrace{\frac{dC(x)}{dx}e^{-x} - C(x)e^{-x}}_{\text{pochodna}} + \underbrace{C(x)e^{-x}}_{\text{funkcja}} = xe^{-x}$$

Po redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy równanie, z którego można policzyć $C(x)$ rozdzielając zmienne

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{-x} = xe^{-x} \quad /\cdot e^{x}dx$$

czyli

$$dC(x) = xdx$$

a po scałkowaniu

$$\int dC(x) = \int xdx$$

Stąd

$$C(x) = \frac{1}{2}x^2$$

W całkowaniu przyjmujemy stałą całkową równą zero, ponieważ szukamy dowolnego rozwiązania szczególnego i takie postępowania uprości dalsze przekształcenia. Podstawiając wyliczoną funkcję $C(x)$ do RSRN otrzymujemy jego końcową postać

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki” nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

$$y_s(s) = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$$

Szukane RORN jest sumą rozwiązań $y_0(x)$ i $y_s(x)$, tj.

$$y(x) = C_1e^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x}$$

5.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. Rozwiązać równania liniowe:

a) $y' + 3x^2y = x^2$,
b) $y' + 2\frac{y}{x} = 5x^2 - 3$,
c) $xdy = (x\,sin\,x - y)dx$,
d) $xy' + 2y = e^x + ln\,x$,
e) $y' = 2y + e^x - x$ przy warunku początkowym $y(0) = \frac{1}{4}$.

6. Równania różniczkowe Bernoullego

Równanie różniczkowe postaci

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n \tag{4}$$

Gdzie $p(x)$ i $q(x)$ są danymi funkcjami zaś $n \in R$ jest nazywane równaniem Bernoulliego. Dla $n = 0$ lub $n = 1$ równie to jest równaniem różniczkowym liniowym, a dla $n \neq 0$ i $n \neq 1$ równaniem nieliniowym.
W przypadku $n \neq 0$ i $n \neq 1$ podstawienie

$$z = y^{1-n} \tag{5}$$

sprowadza równanie Bernoulliego do równania różniczkowego liniowego rzędu pierwszego.

6.1. Zadania przykładowe

Przykład 1. Rozwiązać równanie Bernoulliego $y' - 9x^2y + 3x^2\sqrt[3]{y^2} = 0$.

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki" nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

Rozwiązanie

W równaniu $n = \frac{2}{3}$. Zapiszmy równanie w postaci

$$\frac{dy}{dx} - 9x^2y + 3x^2y^{\frac{2}{3}} = 0 \ \ /\cdot y^{-\frac{2}{3}}$$

$$y^{-\frac{2}{3}}\frac{dy}{dx} - 9x^2y^{\frac{1}{3}} = -3x^2$$

W dalszej kolejności dokonujemy podstawienia

$$z = y^{1-\frac{2}{3}} = y^{\frac{1}{3}}$$

Wpisz tutaj równanie.i obliczamy pochodną funkcji z, tj.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\frac{dy}{dx} \ \ /\cdot 3$$

$$3\frac{dz}{dx} = y^{-\frac{2}{3}}\frac{dy}{dx}$$

Po podstawieniu do równania $z = y^{\frac{1}{3}}$ i $y^{-\frac{2}{3}}\frac{dy}{dx} = 3\frac{dz}{dx}$ otrzymujemy równanie liniowe

$$3\frac{dz}{dx} - 9x^2z = -3x^2$$

które rozwiązujemy metodą omówioną w rozdziale 5 stosując schemat: ROJN=RORJ+RSRN.

Krok1. Wyznaczamy RORJ (oznaczone z_0), które tutaj spełnia równanie jednorodne

$$3\frac{dz}{dx} - 9x^2z = 0$$

Poniższe przekształcenia mają na celu rozdzielenie w równaniu zmiennych. Przenosimy $9x^2z$ na prawą stronę równana

$$3\frac{dz}{dx} = 9x^2z \ \ /\cdot \frac{1}{3z}dx$$

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki" nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

$$\frac{dz}{z} = 3x^2 dx$$

Całkujemy stronami

$$\int \frac{dz}{z} = \int 3x^2 dx$$

$$ln|z| = x^3 + C$$

Wykorzystując definicję logarytmu i własności potęg wyliczamy z_0

$$z_0 = e^{x^3+C} = e^{x^3} e^C$$

$$z_0(x) = C_1 e^{x^3}$$

gdzie $C_1 = e^C$.
Krok 2. Wyznaczamy RSRN (oznaczone przez z_s) metodą uzmienniania stałej. Przyjmujemy, że RSRN ma postać

$$z_s = C(x)e^{x^3}$$

Obliczamy pochodną

$$\frac{dz_s}{dx} = \frac{dC}{dx} e^{x^3} + 3C(x)x^2 e^{x^3}$$

Funkcję z_s i jej pochodną $\frac{dz_s}{dx}$ podstawiamy do równania liniowego niejednorodnego

$$3\left(\frac{dC}{dx} e^{x^3} + 3C(x)x^2 e^{x^3}\right) - 9x^2 C(x) e^{x^3} = -3x^2$$

$$3\frac{dC}{dx} e^{x^3} + 9x^2 C(x) e^{x^3} - 9x^2 C(x) e^{x^3} = -3x^2$$

$$3\frac{dC}{dx} e^{x^3} = 3x^2 \;/\cdot \frac{1}{3} e^{-x^3} dx$$

$$dC = x^2 e^{-x^3} dx$$

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki" nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

$$\int dC = \int x^2 e^{-x^3} dx$$

Całkę po prawej stronie obliczamy przez podstawienie

$$C(x) = \int x^2 e^{-x^3} dx = \begin{bmatrix} -x^3 = t \\ -3x^2 dx = dt \ /:(-3x^2) \\ dx = \dfrac{dt}{-3x^2} \end{bmatrix} = \int -\frac{1}{3} e^t dt = -\frac{1}{3} e^t = -\frac{1}{3} e^{-x^3}$$

Stąd RSRN ma postać

$$z_s(x) = -\frac{1}{3} e^{-x^3} \cdot e^{x^3} = -\frac{1}{3}$$

Zatem RORN jest sumą rozwiązań z kroku 1 i kroku 2, tj.

$$z(x) = C_1 e^{x^3} - \frac{1}{3}$$

Wracamy do podstawienia $z = y^{\frac{1}{3}}$

$$y^{\frac{1}{3}} = C_1 e^{x^3} - \frac{1}{3} \ /^3$$

Ostatecznie rozwiązaniem ogólnym równania Bernoulliego jest funkcja

$$y(x) = \left(C_1 e^{x^3} - \frac{1}{3}\right)^3$$

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki" nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

6.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1.
Wskazać, które z podanych równań różniczkowych to równania Bernoulliego:

a) $y' - e^x y = 0$,
b) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+y}{x^2+x}$,
c) $x\frac{dy}{dx} = ye^{x/y} - x$,
d) $\sqrt{y}dx + xdy = 0$.

Zadanie 2.
Rozwiązać równania Bernoulliego;

a) $x\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{y^2}$,
b) $\frac{dy}{dx} + xy = xy^3$ przy warunku $y(0) = 2$.

Zadanie 3.
Liczbę supermarketów używających elektronicznej bramki antykradzieżowej opisuje równanie $\frac{dC}{dt} = C(1 - 0{,}0005C)$, $t > 0$, przy warunku $C(0) = 1$ (t – czas w miesiącach). Ile supermarketów będzie używać tego zabezpieczenia: a) za trzy miesiące, b) w bardzo dalekiej przyszłości ?

7. Równania różniczkowe zupełne

Równanie różniczkowe postaci

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{6}$$

gdzie wyrażenie $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ jest różniczką zupełną funkcji dwóch zmiennych $F(x,y)$ nazywamy równaniem różniczkowym zupełnym. Rozwiązanie równania (6) przedstawiamy w postaci

$$F(x,y) = C \tag{7}$$

gdzie funkcję $F(x,y)$ wyznaczamy z układu równań.

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki" nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y) \end{cases} \tag{8}$$

Równanie (6) jest równaniem zupełnym wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{9}$$

Zaznaczmy, że rozwiązywanie układu równań (8) to nie jedyny sposób obliczania funkcji $F(x,y)$.

7.1. Zadania przykładowe

Przykład 1. Rozwiąż równanie $(4cosx + e^{-y})dx + (6y - xe^{-y})dy = 0$.

Rozwiązanie
Sprawdzamy w pierwszej kolejności, czy zachodzi warunek (9). W tym przypadku $P(x,y) = 4cosx + e^{-y}$ i $Q(x,y) = 6y - xe^{-y}$. Obliczając odpowiednie pochodne cząstkowe otrzymujemy

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -e^{-y}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -e^{-y}$$

Ponieważ $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ więc równanie jest zupełne i jego rozwiązaniem jest funkcja $F(x,y)$ spełniająca układ równań

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 4cosx + e^{-y} \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 6y - xe^{-y} \end{cases}$$

Mnożymy pierwsze z równań układu dx otrzymując równanie o zmiennych rozdzielonych, które następnie całkujemy stronami, tj.

$$dF = (4cosx + e^{-y})dx$$

$$\int dF = \int (4cosx + e^{-y})dx$$

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki" nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

Stąd

$$F(x,y) = 4sinx + xe^{-y} + \varphi(y)$$

Ponieważ całkowanie zachodziło względem zmiennej x, to stała całkowa $\varphi(y)$ jest funkcją argumentu y. Funkcję $F(x,y)$ podstawimy teraz do drugiego równania w układzie, ale najpierw policzymy jej pochodną cząstkową względem zmiennej y

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -xe^{-y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Po podstawieniu drugie równanie układu przyjmie postać

$$-xe^{-y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 6y - xe^{-y}$$

Po redukcji wyrazów podobnych mamy równanie, które rozwiązujemy stosując po raz drugi metodę rozdzielenia zmiennych

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 6y \quad / \cdot dy$$

$$d\varphi = 6ydy$$

$$\int d\varphi = \int 6ydy$$

Stąd

$$\varphi(y) = 3y^2$$

Ostatecznie rozwiązanie ogólne danego równania zupełnego spełnia warunek

$$4sinx + xe^{-y} + 3y^2 = C$$

Zauważmy, że rozwiązanie równania różniczkowego podane jest w sposób uwikłany. Taki sam wynik otrzymamy, gdy zaczniemy rozwiązywać układ (8) od drugiego równania układu. Wybór strategii zależy od naszego doświadczenia i sprawności w liczeniu całek.

7.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki" nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

Zadanie 1.
Sprawdzić, które z podanych równań różniczkowych jest równaniem zupełnym:

a) $(ln\, y - 2x)dx + \left(\frac{x}{y} - 2y\right) dy = 0,$
b) $(x + y)(x - y)dx + x(x + 2y)dy = 0.$

Zadanie 2. Dla jakiej wartości $k \in R$ poniższe równanie jest zupełne?

a) $(2xy^2 + ye^x)dx + (2x^2y + ke^x - k)dy = 0,$
b) $\frac{k}{y} + x - \frac{2x}{y^2}\frac{dy}{dx} = 0.$

Zadanie 3. Rozwiąż równanie:

a) $(ln\, y - 2x)dx + \left(\frac{x}{y} - 2y\right) dy = 0,$
b) $(e^x + y)dx + (2 + x + ye^y)dy = 0.$

8. Równania różniczkowe liniowe rzędu *n*-tego o stałych współczynnikach

Równaniem różniczkowym liniowym rzędu n-tego o stałych współczynnikach nazywamy równanie postaci

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x) \tag{10}$$

gdzie $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ są liczbami rzeczywistymi, $a_n \neq 0$ i $f(x)$ jest daną funkcją. Jeżeli $f(x) = 0$, to równanie (10) nazywamy równaniem różniczkowym jednorodnym, a gdy $f(x) \neq 0$ to niejednorodnym.

Do rozwiązania równania (10) stosuje się twierdzenie podane w rozdziale 5, które zapisano symbolicznie

RORN=RORJ+RSRN

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki" nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

Krok1. Szukamy RORJ w postaci funkcji $y = e^{rx}$. Podstawiając funkcję i jej pochodne

$$y = e^{rx}, y' = re^{rx}, \dots, y^{(n-1)} = r^{n-1}e^{rx}, y^{(n)} = r^n e^{rx} \tag{11}$$

do równania jednorodnego otrzymuje się tzn. równanie charakterystyczne postaci

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0 \tag{12}$$

którego pierwiastki wyznaczamy w dziedzinie zespolonej.
Jeżeli:

1. liczby r_1, r_2 są różnymi rzeczywistymi pierwiastkami równania charakterystycznego (12), to funkcje $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$ są dwoma liniowo niezależnymi rozwiązaniami szczególnymi równania różniczkowego jednorodnego (RSRJ),
2. liczba rzeczywista r jest k –krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego (12), to funkcje $y_1 = e^{rx}, y_2 = xe^{rx}, y_3 = x^2 e^{rx}, \dots, y_k = x^{k-1}e^{rx}$ są liniowo niezależnymi RSRJ,
3. liczba $r_1 = a + bi$, a tym samym jej sprzężenie $r_2 = a - bi$, jest zespolonym pierwiastkiem równania charakterystycznego (12), to funkcje $y_1 = e^{ax} sin(bx)$ i $y_2 = e^{ax} cos(bx)$ są liniowo niezależnymi RSRJ,
4. liczba $r_1 = a + bi$, a tym samym jej sprzężenie $r_2 = a - bi$, jest k –krotnym zespolonym pierwiastkiem równania charakterystycznego (12), to funkcje $y_1 = e^{ax} sin(bx), y_2 = xe^{ax} sin(bx), \dots, y_k = x^{k-1} e^{ax} sin(bx)$ oraz $y_1 = e^{ax} cos(bx), y_2 = xe^{ax} cos(bx), \dots, y_k = x^{k-1} e^{ax} cos(bx)$ są liniowo niezależnymi RSRJ.

RORJ jest kombinacją liniową wszystkich RSRJ danego równania jednorodnego.

Krok 2. Wyznaczamy RSRN metodą przewidywań. Tabela 1 przedstawia przewidywanie RSRN w zależności od postaci funkcji $f(x)$ występującej w równaniu (10) oraz od rodzaju pierwiastków równania charakterystycznego (12). Występujące w Tabeli 1 funkcje $P_n(x)$, $Q_n(x)$, $R_n(x), W_n(x)$ są wielomianami stopnia n –tego.

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki" nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

Tabela 1.Postać RSRN

Postać funkcji $f(x)$	Przewidywana postać RSRN
$f(x) = W_n(x)$	$P_n(x)$ jeżeli $r = 0$ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego
	$x^k P_n(x)$ jeżeli $r = 0$ jest $k -$ krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego
$f(x) = W_n(x)e^{ax}$	$P_n(x)e^{ax}$ jeżeli $r = a$ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego
	$x^k P_n(x)e^{ax}$ jeżeli $r = a$ jest k –krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego
$f(x) = e^{ax}\,(W_n(x)\,sin(b\,x) + +R_n(x)\,cos(b\,x))$	$e^{ax}\,P_n(x)\,sin(b\,x) + e^{ax}\,Q_n(x)\,cos(b\,x)$ jeżeli $r = a \pm bi$ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego
	$x^k(e^{ax}P_n(x)\,sin(b\,x) + e^{ax}Q_n(x)\,cos(b\,x))$ jeżeli $r = a \pm bi$ jest k-krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego

Zauważmy, że metoda przewidywań nie jest metodą ogólną i dotyczy tylko wybranych funkcji $f(x)$. Ogólniejszą metodą jest, poznana w rozdziale 5, metoda uzmienniania stałej.

8.1. Zadania przykładowe

Przykład 1. Rozwiąż równania różniczkowe:

a) $y'' + y' - 12y = 0$,
b) $y''' - 6y'' + 9y' = 0$,
c) $y'' + 6y' + 25y = 0$.

Rozwiązanie
Ad. a) Równanie charakterystyczne ma postać

$$r^2 + r - 12 = 0$$

Obliczamy wyróżnik (deltę) $\Delta = 1 - 4 \cdot (-12) = 49$, a następnie pierwiastki równania kwadratowego

$$r_1 = \frac{-1-7}{2} = -4$$

$$r_2 = \frac{-1+7}{2} = 3$$

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki" nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

Ponieważ równanie charakterystyczne ma dwa pierwiastki rzeczywiste, to odpowiadające im dwa RSRJ są postaci

$$y_1 = e^{-4x} \text{ i } y_2 = e^{3x}$$

Stąd rozwiązaniem ogólnym równania jest funkcja, która jest kombinacją liniową RSRJ, tj.

$$y(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{3c}$$

Ad. b) Równanie charakterystyczne ma postać

$$y^3 - 6r^2 + 9r = 0$$

Wyłączmy wspólny czynnik r przed nawias

$$r(r^2 - 6r + 9) = 0$$

Dla równania kwadratowego można policzyć deltę i pierwiastki, ale stosując wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy powyższe równanie można zapisać w postaci

$$r(r-3)^2 = 0$$

Mamy więc trzy pierwiastki rzeczywiste $r_1 = 0, r_2 = 3, r_3 = 3$ w tym jeden ($r = 3$) podwójny. Trzy odpowiadające im rozwiązania szczególne równania jednorodnego (RSRJ) są postaci

$$y_1 = e^0 = 1, \qquad y = e^{3x}, \qquad y_3 = xe^{3x}$$

Stąd rozwiązaniem ogólnym równania jest funkcja

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{3x} + C_3 x e^{3x}$$

Ad. c) Tak jak poprzednio, zaczynamy od rozwiązania równania charakterystycznego

$$r^2 + 6r + 25 = 0$$

którego delta $\Delta = 36 - 4 \cdot 25 = -64$ jest ujemna. Obliczamy pierwiastek z delty $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-64} = 8i$ oraz pierwiastki równania

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki" nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

$$r_1 = \frac{-6-8i}{2} = -3-4i$$

$$r_2 = \frac{-6+8i}{2} = -3+4i$$

Część rzeczywista pierwiastków $a = -3$ natomiast część urojona $b = \pm 4$. Stąd RSRJ są postaci

$$y_1 = e^{-3x} sin4x, \qquad y_2 = e^{-3x} cos4x$$

Rozwiązaniem ogólnym równania jest funkcja

$$y(x) = C_1 e^{-3x} sin4x + C_2 e^{-3x} cos4x$$

Przykład 2. Rozwiązać równanie $y''' - 6y'' + 9y' = 12e^{3x}$.

Rozwiązanie
W rozwiązaniu stosujemy poznany już schemat: RORN=RORJ+RSRN.
Krok 1. Wyznaczamy RORJ równania

$$y''' - 6y'' + 9y' = 0$$

Które rozwiązywaliśmy w *Przykładzie* 1. b) otrzymując RORJ w postaci

$$y_0 = C_1 + C_2 e^{3x} + C_3 x e^{3x}$$

Krok 2. Wyznaczamy RSRN metodą przewidywań. Ponieważ $f(x) = 12e^{3x}$ i $r = 3$ jest podwójnym pierwiastkiem równania charakterystycznego, to zgodnie ze schematem przedstawionym w Tabeli 1, RSRN ma postać

$$y_s = Ax^2 e^{3x}$$

Aby wyliczyć stałą A podstawiamy powyższą funkcję do równania różniczkowego niejednorodnego. W tym celu należy policzyć pochodne do rzędu trzeciego włącznie

$$y_s' = 2Axe^{3x} + 3Ax^2 e^{3x}$$

$$y_s'' = 2Ae^{3x} + 6Axe^{3x} + 6Axe^{3x} + 9Ax^2 e^{3x} = 2Ae^{3x} + 12Axe^{3x} + 9Ax^2 e^{3x}$$

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki" nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

$$y_s''' = 6Ae^{3x} + 12Ae^{3x} + 36Axe^{3x} + 18Axe^{3x} + 27Ax^2e^{3x}$$
$$= 18Ae^{3x} + 54Axe^{3x} + 27Ax^2e^{3x}$$

Podstawiając powyższe pochodne do wyjściowego równania różniczkowego niejednorodnego mamy

$$18Ae^{3x} + 54Axe^{3x} + 27Ax^2e^{3x} - 6(2Ae^{3x} + 12Axe^{3x} + 9Ax^2e^{3x})$$
$$+ 9(2Axe^{3x} + 3Ax^2e^{3x}) = 12e^{3x}$$

$$18Ae^{3x} + 54Axe^{3x} + 27Ax^2e^{3x} - 12Ae^{3x} - 72Axe^{3x} - 54Ax^2e^{3x} + 18Axe^{3x}$$
$$+ 27Ax^2e^{3x} = 12e^{3x}$$

Po redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy równanie

$$6Ae^{3x} = 12e^{3x} \ /: 6e^{3x}$$

Stąd $A = 2$. Zatem RSRN jest funkcja $y_s = 2x^2e^{3x}$. RORN jest więc sumą rozwiązań z kroku 1 i kroku 2, tj.

$$y(x) = C_1 + C_2e^{3x} + C_3xe^{3x} + 2x^2e^{3x}$$

8.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. Rozwiązać równania różniczkowe:

a) $y'' + 3y' - 10y = 0$,
b) $\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} + 16y = 0$,
c) $8y''' + y = 0$,
d) $y'' + 6y' + 5y = 0$ przy warunkach $y(0) = 0,\ y'(0) = 8$.

Zadanie 2. Napisać równanie różniczkowe liniowe, którego rozwiązaniami szczególnymi są funkcje:

a) $4e^{6x}, 3e^{-3x}$,
b) $3, 2x,\ -e^{7x}$,
c) $10\cos 4x,\ -5\sin 4x$.

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki" nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

Zadanie 3. Rozwiązać równania różniczkowe:

a) $y'' + 4y' + 4y = 2x + 6$,
b) $y'' - y' - 12y = 14e^{4x}$,
c) $y'' + 25y = 6\,sin\,x$,
d) $y'' + y = cos\,x$, przy warunkach początkowych $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

9. Odpowiedzi do zadań

9.1. Odpowiedzi do rozdziału 2

Zadanie 1.

a) Równanie różniczkowe zwyczajne; niewiadoma funkcja y, argument funkcji x, rząd równania wynosi dwa.
b) Równanie różniczkowe zwyczajne, niewiadoma funkcja t, argument funkcji w, rząd równania wynosi 3.
c) Równanie różniczkowe zwyczajne, niewiadoma funkcja U, argument funkcji R, rząd równania wynosi 2.
d) To nie jest równanie różniczkowe.
e) Równanie różniczkowe cząstkowe, niewiadoma funkcja z, argumenty funkcji x, y, t, rząd równania wynosi 1.

Zadanie 2.

a) Tak
b) Nie
c) Tak

9.2. Odpowiedzi do rozdziału 3

Zadanie 1.

a) $y(x) = Ce^{-\frac{1}{2x}}$,
b) $y^2(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 6x + C$,
c) $y^3(x) = 3ln\left(x + \sqrt{x^2 + 6}\right) + C$,
d) $y(x) = Ce^{-\frac{1}{2x}}$,
e) $y^2(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 6x + C$,
f) $y^3(x) = 3ln\left(x + \sqrt{x^2 + 6}\right) + C$,

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki" nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

g) $y(x) = Ce^{-\frac{1}{2x}}$,
h) $y^2(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 6x + C$,
i) $y^3(x) = 3ln\left(x + \sqrt{x^2 + 6}\right) + C$,
j) $y(x) = 2 + Ce^{\frac{\sqrt{2}}{4}arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{4}x\right)}$,
k) $y(x) = \frac{C}{x} - 3$,
l) $y^2(x) = 2x^4 + 8e^x + 2x + C$,
m) $y(x) = Ce^{2arcsin\frac{x}{2}}$
n) $y(x) = -\frac{1}{x}$,
o) $y(x) = 2ln\left|\frac{1+e^x}{1+2}\right| - 1$.

Zadanie 2.
Oznaczenia: $N(t)$ – ilość substancji (w kg) w zbiorniku w chwili t (w minutach), $V(t)$ – objętość cieczy w zbiorniku (w litrach).
Dane:
- $N(0) = 20$ kg, $V(0) = 300$ litrów,
- dopływ: 3 litry/minutę o stężeniu 1 kg/5 litrów; szybkość dopływu substancji = $3 \cdot 0{,}2 = 0{,}6$ kg/minutę;
- odpływ: 4 litry/minutę o stężeniu $\frac{N(t)}{V(t)} = \frac{N(t)}{300+(3-4)t} = \frac{N(t)}{300-t}$ (obowiązuje dla $0 \leq t \leq 300$); szybkość odpływu substancji = $4 \cdot \frac{N(t)}{300-t}$.

Równanie bilansu: $\frac{dN}{dt} = dopływ - odpływ = 0{,}6 - 4\frac{N(t)}{300-t}$.
Należy rozwiązać równanie różniczkowe rzędu pierwszego $\frac{dN}{dt} + 4\frac{N}{300-t} = 0{,}6$ z warunkiem początkowym $N(0) = 20$. Model ten obowiązuje dla $0 \leq t \leq 300$.

Rozwiązanie: $N(t) = 60 - 0{,}2t - \frac{40\,(300-t)^4}{300^4}$.

Stężenie po 50 minutach: $\frac{N(50)}{V(50)} = 0{,}2 - \frac{40}{300^4} \cdot 250^3 \approx 0{,}1228 = 12{,}28\%$.

Zadanie 3.
Oznaczenia: m –masa punktu materialnego, V – prędkość punktu materialnego, $F(t, V)$ – siła, k – dodatnia stała proporcjonalności.
Równanie różniczkowe $m\frac{dV}{dt} = \frac{kt}{V}$ z warunkiem początkowym $V(0) = 0$.

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki" nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

Rozwiązanie: $V(t) = \sqrt{\frac{k}{m}}t$ dla $t \geq 0$.

Zadanie 4.
Oznaczenia: $N(t)$ – liczebność populacji w chwili t (czas w miesiącach), k – dodatnia stała proporcjonalności tzn. stała wzrostu.
Równanie różniczkowe $\frac{dN}{dt} = kN$ z warunkami $N(0) = N_0$, $N(1) = \frac{3}{2}N_0$.
Rozwiązanie: $N(t) = N_0 e^{t ln\frac{2}{3}} = N_0 \left(\frac{2}{3}\right)^t$ dla $t \geq 0$.
Czas potrojenia się populacji: $t = \frac{ln3}{ln\frac{3}{2}} \approx 2{,}71$ miesiąca.

9.3. Odpowiedzi do rozdziału 4

Zadanie 1.

a) Rozwiązanie ogólne $y(x) = x(C - ln|x|)$ dla $xy \geq 0$; rozwiązanie szczególne $y(x) \equiv 0$.
b) Rozwiązanie szczególne $y(x) = x(ln(2x) + 1)$.

9.4. Odpowiedzi do rozdziału 5

Zadanie 1.

a) $y(x) = \frac{1}{3} + Ce^{-x^3}$,
b) $y(x) = x^3 - x + \frac{C}{x^2}$,
c) $y(x) = -cosx + \frac{sinx}{x} + \frac{C}{x}$,
d) $y(x) = \frac{C}{x^2} + e^x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) + 0{,}5lnx - 0{,}25$,
e) $y(x) = -e^x + e^{2x} + 0{,}5x + 0{,}25$.

9.5. Odpowiedzi do rozdziału 6

Zadanie 1.
Równania różniczkowe Bernoulliego: a) $n = 1$, b) $n = 2$, d) $n = \frac{1}{2}$.

Zadanie 2.

a) $\mathbf{y(x) = \left(1 + \frac{C}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}}$ **dla** $\mathbf{x \neq 0, y \neq 0}$**,**

b) $y(x) = \left(1 - \frac{3}{4}e^{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ dla $|x| < \left(ln\frac{4}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki" nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

Zadanie 3.
Liczba supermarketów używających elektronicznej bramki antykradzieżowej w funkcji czasu (t – czas w niesiącach): $C(t) = \frac{2000}{1999e^{-t}+1}$.

a) $C(3) = \frac{2000}{1999e^{-3}+1} \approx 20$,
b) 2000.

9.6. Odpowiedzi do rozdziału 7

Zadanie 1.
a) Tak
b) Nie

Zadanie 2.
a) $k = 1$,
b) $k = 2$.

Zadanie 3.
a) $xlny - x^2 - y^2 = C$,
b) $e^x + xy + 2y + e^y(y-1) = C$.

9.7. Odpowiedzi do rozdziału 8

Zadanie 1.
a) $y(x) = C_1e^{-5x} + C_2e^{2x}$,
b) $y(x) = C_1e^{-4x} + C_2xe^{-4x} = e^{-4x}(C_1 + C_2x)$,
c) $y(x) = C_1e^{-\frac{1}{2}x} + e^{\frac{1}{4}x}\left[C_2cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x\right) + C_3sin\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x\right)\right]$,
d) $y(x) = 2e^{-x} - 2e^{-5x}$.

Zadanie 2.
Zadanie nie ma jednoznacznego rozwiązania. W odpowiedzi podane są równania różniczkowe możliwie najniższego rzędu.
a) $y'' - 3y' - 18y = 0$,
b) $y''' - 7y'' = 0$,
c) $y'' + 16y = 0$.

Zadanie 3.
a) $\boldsymbol{y(x) = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + \frac{1}{2}x + 1}$,
b) $\boldsymbol{y(x) = C_1e^{4x} + C_2e^{-3x} + 2xe^{4x}}$,

Politechnika Świętokrzyska Kielce University of Technology
Projekt „Dostosowanie kształcenia w Politechnice Świętokrzyskiej do potrzeb współczesnej gospodarki" nr FERS.01.05-IP.08-0234/23

c) $y(x) = C_1 cos5x + C_2 sin5x + \frac{1}{4} sinx$

d) $y(x) = -cosx + sinx + \frac{1}{2} xsinx.$

10. Literatura

Krysicki W., & Włodarski L. (2015). *Analiza matematyczna w zadaniach cz. II*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe. Warszawa.

Siewierski L.(1981). *Ćwiczenia z analizy matematycznej z zastosowaniami cz. II,* Państwowe Wydawnictwo Naukowe. Warszawa.

Zill D.G. (2012). *A first course in differential equations with modeling applications*, Richard Stratton. Boston.

Żakowski W., & Leksiński W (2017). *Matematyka cz. IV*, Wydawnictwo-Naukowo-Techniczne. Warszawa.